This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

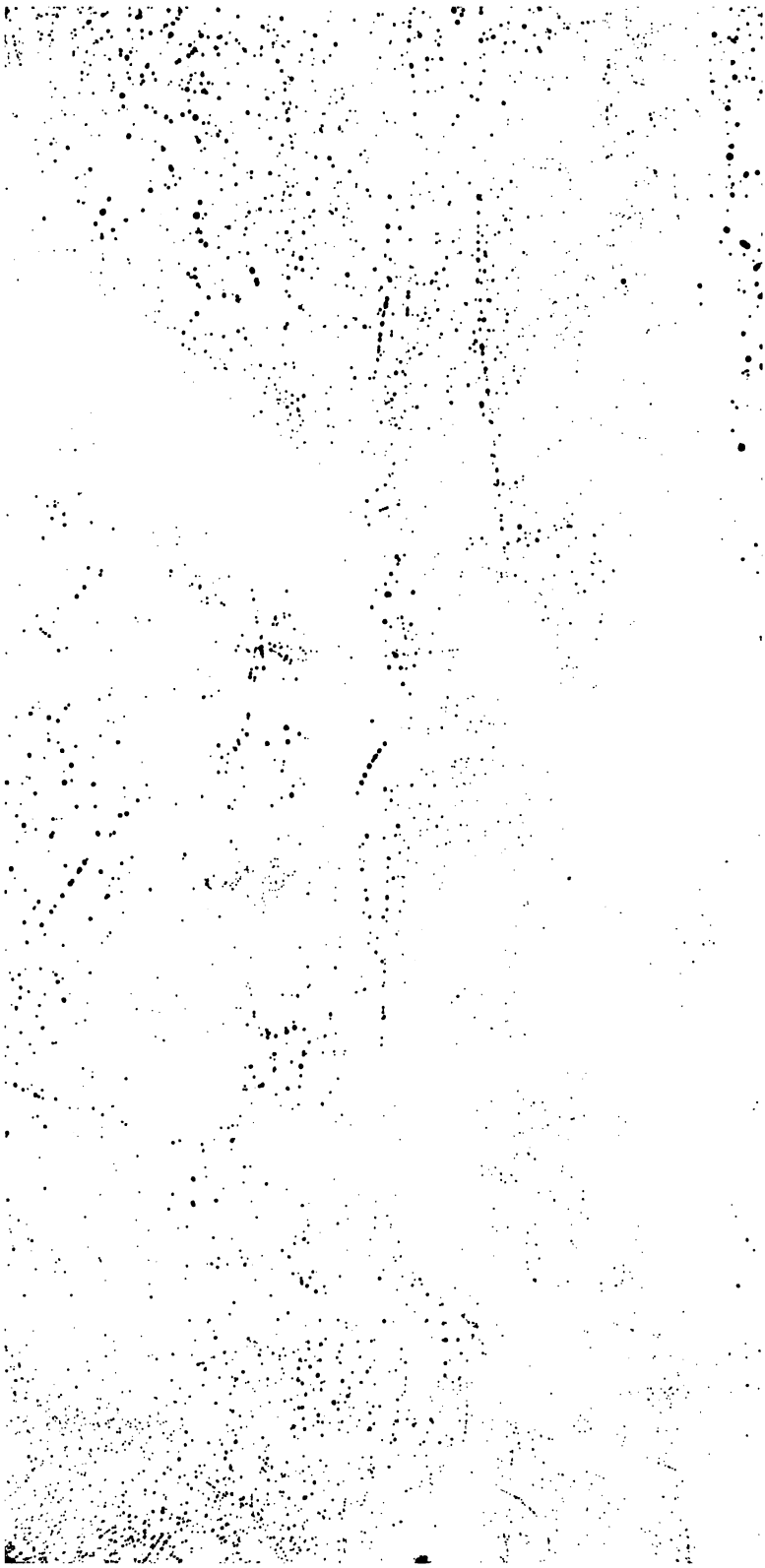
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06910503 3

Lagre



Functions
(I.C.)

Lagrange's Theorie der analytischen Funktionen,

in welcher die Grundsätze der Differentialrechnung vorgetragen werden, unabhängig von Betrachtung der unendlich kleinen oder verschwindenden Größen der Grenzen oder Fluxionen, und zurückgeführt auf die algebraische Analysis.

Aus dem Französischen übersetzt

von

Johann Philipp Grüson

Königl. Professor der mathematischen Wissenschaften am adelichen Cadettencorps in Berlin, und ordentlichem Mitgliede der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften.

Berlin,
bey F. T. Lagarde
1798.

KvBs

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATIONS

Vorbericht.

Unter den verschiedenen Kentnissen, welche dem menschlichen Geiste zur Ehre und Zierde gereichen, haben die mathematischen immer den ersten Rang eingenommen, weil sie allein sich, wie schon ihr Name lehrt, ausschließend im Besitze der Gewißheit befinden, und weil man aus diesem Grunde von ihnen sagen kann, daß sie allein wahre Wissenschaft sind.

Es

Es ist aber nicht ihr einziger Vorzug, daß sie zuverläßige und durch ihre zahlreichen Anwendungen nützliche Resultate liefern; auch den Vorzug haben sie, daß sie dahin auf einem Wege führen, der unabhängig von dessen Resultaten selbst sehr nützlich ist. Durch die Mittel, welche in der Geometrie Wahrheit geben, lernt man auch die Mittel kennen, welche in andern ihr fremden Wissenschaften dahin führen. Dadurch daß die Mathematik die Denkkraft stärkt und schärft, und an Gründlichkeit und Bündigkeit im Schließen gewöhnt, ist sie gewissermaßen die Grundlage jeder Art von Kenntnissen, und das war ohne Zweifel die Veranlassung zu der berühmten Inschrift, wodurch Plato nur den Geometern den Eintritt in seinen Hörsaal verstattete. Zu einer Zeit, wo man wegen dieser allgemein anerkannten Wahrheiten die Mathematik zur Grundlage des Unterrichts gemacht hat, muß sich Frankreich Glück wünschen zu einem Werke, welches die wahren Principien des wesentlichsten Theiles dieser Wissenschaften enthält; Principien, welche man bis jetzt verkannte, und an deren Stelle man fremdartige und zu wenig genaue Betrachtungen setzte.

Der Leser erräth, daß wir von J. L. Lagrangens Werke reden wollen, welches unter dem Ti-

Titel erſchien: Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouiſſans, de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyſe algébrique des quantités finies; Par. J. L. Lagrange, de l' Institut national. Paris, de l' imprimerie de la république. Prairial an V.

Newton und Leibnitz, welche ſich die Ehre der Erfindung der Differentialrechnung ſtreitig machten, kamen beyde zu den Reſultaten derſelben auf verſchiedenen Wegen; Leibnitz dadurch, daß er die unendlich kleinen Größen verſchiedener Ordnungen in Betrachtung zog, auf die von höherer Ordnung aber als auf Nullen keine Rückſicht nahm; Newton dadurch, daß er die mathematiſchen Größen ſo anſah, als wären ſie durch die Bewegung erzeugt, und daß er das Verhältniß veränderlicher Geſchwindigkeiten, wodurch dieſe Größen hervorgebracht werden, beſtimmte.

Man muß ſich wundern, daß dieſe großen Männer, beyde die wahre Metaphyſik dieſer Rechnung verfehlt haben. Leibnitzens Princip iſt nicht genau genug, weil er Größen abſolut als Nullen betrachtet, die nur unendlich klein ſind. Newtons Princip bringt in die

rechnung bloß algebraiſcher Größen den Begriff Geſchwindigkeit, der ihnen fremd iſt.

Wenn gleich Leibnitz's Methode unbeantwortlichen Einwürfen Raum giebt, ſo hat ſie doch den Vortheil, daß ſie einen immer ſehr leichten Gang angiebt. Newtons Methode hingegen iſt zwar auf eine einleuchtendere Metaphyſik gegründet, giebt aber zu vielen Verwirrungen Anlaß, und fordert alle Augenblicke beſondere Kunſtgriffe, um ihre verſchiedenen Theile zu erweiſen.

Auch hat Newton ſelbſt ihr am Ende entſagt, und in ſeinem Werke über die Principien, die Methode der letzten Verhältniſſe der verſchwindenden Größen angenommen.

Dieſe Methode, ſo wie auch die Methode der Grenzen, welche Dalembert nachher an ihrer Stelle ſetzte, und die, eigentlich zu reden, nur eine algebraiſche Ueberſetzung iſt, hat den Zweck, zu zeigen, daß die Größen, welche man für unendlich klein hält, durchaus Null ſind; daß ihre Verhältniſſe untereinander (die einzigen Größen, welche bey der Rechnung in Betrachtung kommen) die Grenzen der Verhältniſſe endlicher Differenzen ſind. Aber man muß geſtehen

da

daß dieſe an ſich richtige Idee nicht klar genug iſt, und daß es ſchwer hält, das Verhältniß zweyer Größen aufzufaſſen, in dem Augenblicke, wo ſie aufhören vorhanden zu ſeyn.

Dies ſind die verſchiedenen Methoden, welche man bis jetzt in der Differentialrechnung angewendet hat. Die Principien worauf ſie beruhen, ſind, wie man ſieht, gleich falſch, und da ſie in unſern Elementarbüchern untereinander gewirret ſind; konnten ſie wohl einer Wiſſenſchaft zur Grundlage dienen, deren Gewißheit auf Evidenz beruhen muß?

Das neue Princip des Bürgers Lagrange gründet ſich auf die einfache Theorie von der Entwickelung der Functionen. Die Differentialrechnung wird auf die Weiſe von allen fremdartigen Begriffen befreyet, und macht nur einen beſondern Zweig der Analyſis endlicher Größen aus.

Taylor's Theorem, welches die Grundlage der Differentialrechnung iſt, war bis jetzt nur vermittelſt dieſer Rechnung ſelbſt erwieſen worden, und dieſe Beweisart bringt in die durch ſie entſtehende Reihe, unendlich kleine Differenzen, ungeachtet jede dieſer

Diffe-

Differenzen, durch ihre respective Stellung in jedem Ausdrucke eine endliche Größe bildet.

Seit 1772 bewies der Bürger Lagrange dieses Theorem durch ein ganz neues Verfahren. Das von ihm angewandte Princip hat den doppelten Vorzug, daß es den Beweis von allem Fremdartigen befreyt, und daß es in seine Reihe nur endliche Functionen der veränderlichen Größe bringt. Diese successiven Functionen werden von der primitiven Function abgeleitet, und hängen im wesentlichen einzig von dieser Function ab.

Nach dieser kurzen Auseinandersetzung wird man leicht sehen, daß die unter dem Namen abgeleitete Functionen bezeichneten Größen nichts anders sind, als die Verhältnisse der Differentialen der verschiedenen Ordnungen, welche man in den neuen Rechnungen anwendet. Durch eine solche Darstellung werden diese Verhältnisse von der Idee des Unendlichen los gemacht, und an die Stelle des bis jetzt üblichen Bezeichnung derselben setzt der Verfasser eine viel einfachere und natürlichere, von welcher wir wagen voraus zu sagen, daß sie bald allgemein angenommen werden wird.

Nach-

Nachdem der Verfaſſer das Verhältniß gezeigt, welches zwiſchen den abgeleiteten ſucceſſiven Functionen ſtatt findet, und nachdem er bewieſen, daß, ſobald man die erſte Function bekommen hat, man durch die bloße Wiederhohlung derſelben Operationen alle übrige erhält, giebt er das Mittel an, für alle Fälle jene erſte Function zu bekommen. Er zeigt hierauf die vornehmſten Anwendungen der abgeleiteten Gleichungen auf die Verwandlung der Functionen, und in der Theorie der Reihen, eine bey dem gegenwärtigen Zuſtande der Analyſis wichtige Theorie, die er beiläufig mit neuen Sätzen bereichert. Der merkwürdigſte giebt die Grenzen des Werthes einer unendlichen Reihe, (wobey man von einem beliebigen Gliede dieſer Reihe ausgehn kann) und giebt ſo ein Mittel an die Hand, den Irrthum zu beſtimmen, welcher bey der Anwendung der Annäherungsmethode dadurch entſteht, daß man gewiſſe Größen nicht in Anſchlag bringt, einen Irrthum, welchen man bis jetzt nicht ſchätzen konnte, und der die Anwendung jener Methode ſehr gefährlich machte.

Dieſe verſchiedenen Reſultate, und alle, welche von der abſtrakten Theorie der Functionen abhangen, machen den erſten Theil des Werkes aus; und enthalten faſt alles, was über die neue Rechnung vor-

handen war. Man weiß, daß die Auflösung der wichtigsten Aufgaben, welche die Geometrie und Mechanik darbieten, wesentlich davon abhängt.

In dem 2ten Theile zeigt der Verfasser, daß alle diese Auflösungen ebenfalls durch seine neuen Theorien gegeben werden. Mit Bewunderung findet man hier wieder die Evidenz und Strenge der Beweise, welche die Geometrie der Alten charakterisirt; aber diese konnten bey ihrem strengen Gange sich nur den Elementen der Wissenschaft nähern. Dem Bürger Lagrange war es aufbehalten, denselben Gang bis an seine Grenzen zu verfolgen; und so den allgemeinsten Resultaten der Analysis den Charakter zu geben, welcher die Auflösungen der Alten unterscheidet.

Das Problem der Tangenten ist das erste unter denen, deren Auflösung wesentlich von der neuen Rechnung abhängt. Diejenigen unter den neuen Geometern, welche für diese Linien eine neue Formel gegeben haben, gründeten sie auf eine willkührliche Betrachtungsart, und entfernten sich von der ganz einfachen Definition, von welcher die alten Geometer ausgingen, um diese Linien unter den wenigen

von

von ihnen betrachteten Curven zu bestimmen, und dieselbe Definition ist es, welche nach der neuen Theorie die allgemeine Formel giebt, und zwar so, daß nach der neuen Bezeichnung diese Formel jeder unendlich kleinen oder fluxionellen Größe entledigt ist. Diesen doppelten Vorzug findet man in allen den Auflösungen, welche von der Anwendung der Algebra auf die Geometrie und die Mechanik abhängen. Seit der allgemeinen Formel des Dalembert; und insonderheit seit dem großen Werke des Bürgers Lagrange sind alle die Fragen, welche von dieser Wissenschaft abhangen, aufgelöst, und ihre vollständige Auflösung hängt von der Vollkommenheit der analytischen Methode ab. Man kann sich indessen nicht verbergen, daß die verschiedenen Principien, auf welchen man die allgemeinen Gleichungen gegründet hatte, oft Klarheit und Evidenz vermissen lassen.

Ein neuer Vorzug der Theorie der Functionen ist es, daß sie diese Gleichungen auf eine möglichst einfache Art giebt. In der That beziehen sich in dieser Wissenschaft die Functionen wesentlich auf die Zeit, welche ein neues Element dieser Rechnung ist.

Man kann die Mechanik betrachten als eine Geometrie, die es mit vier Dimensionen zu thun hat, und die mechanische Analysis als eine Erweiterung der geometrischen Analysis.

Wenn

Wenn man von dieser einfachen Betrachtung ausgeht, und wenn man nach und nach die verschiedenen Arten analysirt, auf welche die drey Coordinaten, welche die Lage eines Punktes im Räume bestimmen, Functionen der Zeit seyn können: so leitet man daraus die verschiedenen bekannten Bewegungen her; und combinirt man nun diese unter sich, so geben sie die allgemeinen Gleichungen. Unmöglich ist es, die Einfachheit der Mittel und die Feinheit der Analysis nicht zu bewundern, welche in diesem Theile des Werkes herrschen.

Die Grenzen dieser Vorrede, und die Schwierigkeit einer so abstracten Materie, erlauben uns nicht, die zahlreichen Entwickelungen und die neuen Theorien aus einander zu setzen, welche jeder Theil der Anwendung der Theorie enthält. Wir wollen nur anzeigen, daß der Autor beyläufig die Theorien der Kegelschnitte mit einer neuen Eigenheit bereichert, und daß er sehr fein den Irrthum aufdeckt, in welchem Newton gefallen war, indem er suchte durch Betrachtung der Reihen das Gesetz des Widerstandes zu finden, der nöthig wäre, damit ein schwerer Körper eine gegebene krumme Linie beschriebe; ein Irrthum, dessen wahren Grund man bis jetzt nicht angeben konnte. Die neuen Wahrheiten drängen sich in diesem Werke, wie die alten

Wahr-

Wahrheiten in den Elementarbüchern, und wenn der Autor sich darauf einschränkt, schon bekannte Resultate zu liefern, so geschieht es immer durch eine neue und allgemeine Methode, welche in jedem Augenblicke die Feinheit seiner Analysis und die Tiefe seines Geistes bewundern läßt.

Wir müssen noch bemerken, daß die Schreibart, welche hell, einfach und bestimmt ist, zum wahren Muster für Untersuchungen dieser Art dienen kann. Newton schien in dieser Rücksicht, durch sein Beyspiel den größten Theil der neuen Geometer verdorben zu haben, welche in ihren Schriften nur allzuoft suchten durch Schwierigkeit und Trockenheit ihrer Untersuchung zu ersetzen, was ihren Resultaten an Wichtigkeit abging. Londorcet hatte in einer weit niedrigern Gattung diesen Fehler zum Uebermaße getrieben: daher man von seinen Werken sagte, daß es mehr Mühe kostete, sie zu lesen, als gekostet haben würde, sie zu schreiben.

Wir wollen übrigens nicht versuchen, ein Werk von dieser Wichtigkeit noch Würden zu loben. Es allein hätte Lagrangens Genie unsterblich gemacht, aber auch schon andre seiner Werke hatten ihm einen Platz zwischen Newton und Archimedes angewiesen.

Man wünscht, daß auch diese deutsche Uebersetzung Beyfall finden möge, die nach dem Wunsche

des

des Herrn Verlegers ohne alle Zusätze erscheint, indem solche einen eigenen Band ausmachen werden. Der 2te Theil folgt diesem unmittelbar, und wird mit einer Vorrede und Zusätzen von Lagrange bereichert, wodurch für diese Uebersetzung ein wichtiger Vorzug vor dem Original erwächst. Zugleich benachrichtige ich, daß ich auch eine Uebersetzung von dem vortreflichen Lehrbegriff der Differential und Integral-Rechnung des Bürgers Lacroix herausgebe, in welchem die Uebereinstimmung der Lagrangischen neuen Theorie der Functionen mit der Differentialrechnung gezeigt ist.

Den Mathematikern ist es vielleicht angenehm zu erfahren, daß ich einen ganz neuen Calcul, den ich Exponirungscalcul nenne, erfunden habe, mittelst welchem ich eben so schnell und leichte alles dasjenige was bisher nur immer die Differentialrechnung geleistet hat, leiste; die Principien aber worauf er beruht, gehören gänzlich zur Analysis endlicher Größen, und entfernen alle Betrachtungen von unendlichkleinen Größen, alles mit einer Simplicität, daß es in der That jeden in Verwunderung setzen muß. Ich werde die Ehre haben eine Abhandlung über diesen neuen Calcul in meiner ersten Vorlesung der Königl. Preußischen Akademie der Wissenschaften vorzulegen. Berlin den 6ten Feb. 1798.

Grüson.

Ver-

Verzeichniß,

der in dieſem Theile enthaltenen Materien.

Theorie

der

analytiſchen Funktionen.

Erſter Theil.

Darſtellung der Theorie mit ihren vornehmſten Anwendungen in der Analyſis.

Nr. 1 — 3 Von den Funktionen überhaupt S. 1 — 3
Nr. 4 — 9 Von den verſchiedenen Arten, wie man den Differenzialcalcul betrachtet hat. Plan dieſer Schrift — — — — S. 3 — 10
Nr. 10 — 15 Von der Entwickelung einer Funktion von einer veränderlichen Größe in einer Reihe, wenn man dieſer veränderlichen Größe einen Wachsthum zueignet — — — — S. 10 — 21

Nr. 16 — 17 Von der ſucceſſiven Bildung der Glieder dieſer Reihe. Von den abgeleiteten Funktionen — — — — — S. 21 — 23

Nr. 18 — 21 Anwendung auf die Binomialformel, und auf die Entwickelung der Exponential- und Logarithmiſchen Größen. Von den abgeleiteten Funktionen der Größen x^n, a^x, log. x — — S. 23 — 28

Nr. 22 — 29 Mittel die Reihen, welche die Logarithmen, die Exponentialgrößen; die sinus, die cosinus und die Bogen ausdrücken, aus einfachen algebraiſchen Betrachtungen abzuleiten. Von den abgeleiteten Funktionen von sin. x, cos. x — — S. 28 — 44

Nr. 30 — 33 Von den abgeleiteten Funktionen der aus einfachen Funktionen zuſammengeſetzten Ausdrücke. Von den abgeleiteten Funktionen aller Ordnungen S. 44 — 50

Nr. 34 — 39. Von der Entwickelung der Funktionen, wenn man der veränderlichen Größe einen beſtimmten Werth giebt. Fall in welchem die allgemeine Regel falſch iſt. Von den Werthen der Brüche von welchen der Zähler und der Nenner zu gleicher Zeit verſchwinden — — — S. 50 — 58

Nr. 40 — 44 Von beſondern (ſinguliers) Fällen, wo die Entwickelung der Funktion nicht nach den poſitiven und ganzen Potenzen des Zuwachſes der veränderlichen Größe fortgeht. Von Brüchen die immer unbeſtimmt bleiben, indem man die abgeleiteten Funktionen von Zähler und Nenner ins Unendliche nimmt S. 58 — 64

Nr. 45 — 47 Allgemeine Auflöſung der Funktionen in Reihen. Mittel die Reſte, von einem beliebigen vorgegebenen Gliede an, auszudrücken — S. 64 — 70

Nr. 48 — 49 Von den Grenzen einer Größe die nur durch ihre abgeleitete Funktion der ersten Ordnung gegeben ist — — — S. 70 — 73

Nr. 50 — 53 Entwickelung der Funktionen in Reihen die begränzt sind, und aus so viel Gliedern als man will bestehen. Neues Theorem über diese Reihen S. 74 — 79

Nr. 54 — 57 Von den abgeleiteten Gleichungen, und ihr Gebrauch zur Umbildung der Funktionen S. 79 — 85

Nr. 58 — 61 Allgemeine Theorie der abgeleiteten Gleichungen, und der beständigen willkührlichen Größen S. 85 — 92

Nr. 62 — 64 Einfache Fälle, von welchen man, von den abgeleiteten Funktionen oder Gleichungen der ersten Ordnung, zu den primitiven Funktionen oder Gleichungen über gehen kann — — S. 92 — 97

Nr. 65 — 68 Von den linearischen Gleichungen verschiedener Ordnungen, und von denen die man linearisch machen kann — — — — S. 97 — 103

Nr. 69 — 70 Von dem Gebrauche der Reihen um die partitulairen Werthe zu ergänzen S. 103 — 108

Nr. 71 — 75 Von den besondern Werthen, welche nicht in den vollständigen primitiven Gleichungen enthalten sind — — — — S. 108. — 117

Nr. 76 — 78 Von dem Gebrauche der abgeleiteten Gleichungen, und von der Bestimmung der beständigen Größen. Anwendung auf die Summirung der Reihen, und auf die Auflösung der Gleichungen vom dritten Grade — — — S. 117 — 127

Nr. 79 — 84 Von der primitiven Gleichung einer Gleichung der ersten Ordnung, in welcher die veränderlichen Größen abgesondert sind, und wo man die primitiven

tiven Funktionen nicht erhalten kann. Merkwürdige Eigenſchaften dieſer primitiven Funktionen S. 127 — 146

Nr. 85 — 90 Von der Entwickelung der Funktionen von zwey veränderlichen Größen. Von ihren abgeleiteten Funktionen. Bezeichnung dieſer Funktionen und Bedingungen, welchen ſie genüge leiſten ſollen — — — — S. 146 — 151

Nr. 91 — 94 Von den Verfahren die man befolgen muß um dieſe abgeleiteten Funktionen zu bekommen. Von den abgeleiteten Gleichungen einer Gleichung zwiſchen drey oder mehrern veränderlichen Größen S. 153 — 157

Nr. 95 — 96. Von zwey beſtändigen Größen oder von der willkührlichen Funktion die in einer vollſtändigen primitiven Gleichung zwiſchen drey veränderlichen Größen vorkömmt — — S. 157 — 161

Nr. 97 — 99 Merkwürdige Formel für die Entwickelung einer beliebigen Funktion von der unbekannten Größe z der Gleichung $z = x + yfz$, in einer Reihe S. 161 — 168

Nr. 100 — 103 Beſonderes Verfahren für die Eliminirung der Funktionen. Allgemeine Methode, die primitive Gleichung von einer Gleichung der erſten Ordnung zwiſchen mehreren veränderlichen Größen zu finden, wenn die abgeleiteten Funktionen lineariſch ſind S. 168 — 176

Nr. 104 — 106 Darſtellung einer allgemeinen Methode, die primitive Gleichung von einer Gleichung der erſten Ordnung zwiſchen drey veränderlichen Größen zu finden. Beyſpiel von dieſer Methode. S. 176 — 186

Theorie

der

analytiſchen Funktionen,

welche die Grundſätze der Differenzialrechnung enthält, unabhängig von der Betrachtung der unendlich kleinen oder verſchwindenden Größen, den Grenzen oder den Fluxionen, und auf die algebraiſche Analyſis endlicher Größen zurückgeführet.

Erſter Theil.

Darſtellung der Theorie, mit ihren vornehmſten Anwendungen in der Analyſis.

1.

Funktion einer oder mehrerer Größen, heißt jeder Ausdruck des Calculs, in welchem dieſe Größen auf irgend eine Art ſich befinden, ſey es in Verbindung mit andern Größen oder nicht, welchen man gegebene und unveränderliche Werthe beylegt, während daß die Größen

der Funktion alle nur mögliche Werthe annehmen nen. Man betrachtet also in den Funktionen bloß Größen, welche man als veränderlich annimmt, ohne die beständigen, die mit unter ihnen seyn können, R sicht zu nehmen.

2.

Um eine Funktion einer einzigen veränderlichen G ße, z. B. von x zu bezeichnen, werden wir bloß diese veränderliche Größe den Buchstaben oder das chen f oder F vorsetzen; wenn man aber die Funkti einer schon aus dieser veränderlichen Größe zusamme setzten Größe anzeigen will, z. B. von x^2 oder $a +$ u. s. w., so schließe man diese Größe in Klammern. wird fx eine Funktion von x, und $f(x^2)$, $f(a +$ u. s. w. werden Funktion von x^2 von $a + bx$ u. s bezeichnen.

Um eine Funktion zweyer veränderlichen unabhä gen Größen, z. B. x, y anzuzeigen, wollen wir $f($ schreiben, und eben so in ähnlichen Fällen.

Wenn wir es nöthig finden, andere Zeichen zur zeichnung der Funktionen zu gebrauchen, so werden nicht unterlassen, es vorher anzuzeigen.

Die ersten Analysten gebrauchten das Wort Funkt um überhaupt die Potenzen einer und derselben G anzuzeigen. Nachher hat man die Bedeutung dieses W erweitert, und darunter jede Größe, die von einer dern auf irgend eine Art gebildet wird, verstanden. L nitz und die Bernoulli haben es zuerst in dieser allge nen Bedeutung gebraucht, und jetzt ist es allgemein genommen.

3.

Wir wollen alſo eine Funktion fx von irgend einer veränderlichen Größe x betrachten. Wenn man ſtatt x ſetzet $x + i$, und i irgend eine unbeſtimmte Größe iſt, ſo wird ſie $f(x + i)$; und nach der Theorie der Reihen kann man daraus eine Reihe wie folgende entwickeln:

$$fx + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots .$$

in welcher die Größen p, q, r u. ſ. w. Coefficienten der Potenzen von i, neue Funktionen von x ſeyn werden, die von der urſprünglichen Funktion fx abgeleitet und von der Größe i unabhängig ſind.

Es iſt klar, daß die Form der Funktionen p, q, r u. ſ. w., einzig und allein von der Form der Funktion fx abhängen wird; und man wird dieſe Funktionen in den beſondern Fällen leicht nach den gewöhnlichen Regeln der Algebra beſtimmen, indem man die Funktion in einer Reihe, die nach den Potenzen von i geordnet iſt, entwickelt.

4.

Dieſe Art, aus einer gegebenen Funktion andere abgeleitete und von der urſprünglichen Funktion gänzlich abhangende Funktionen herzuleiten, iſt von der äuſſerſten Wichtigkeit in der Analyſis. Die Bildung und der Calcul dieſer verſchiedenen Funktionen, iſt genau genommen der eigentliche Gegenſtand des neuen Calculs; d. h. der ſogenannten Differenzial- und Fluxionen-Rechnung. Die erſten Geometer, welche die Differenzialrechnung angewandt haben, als Leibnitz, die beyden Bernoulli, L'hopital u. a. m. gründeten, ſie auf die Betrachtung der unendlich kleinen Größen von verſchiedenen

Ordnungen, und auf die Voraussetzung, daß man
ßen, die von einander nur um unendlich kleine Gr
in Rücksicht ihrer verschieden sind, als gleich betra
und behandeln könne. Sie waren zufrieden, durch
sen Calcul schnell und sicher zu richtigen Resultate
kommen zu seyn, und sie hielten sich daher nicht w
dabey auf, die Gründe davon darzuthun. Euler, L
lambert u. a. m., welche ihnen folgten, suchten
Lücke auszufüllen, indem sie an besondern Anwendu
zeigten, daß die Differenzen, die man als unendlich
annehme, durchaus nichts anders als Nullen seyn so
und daß ihre Verhältnisse (die einzigen Größen, w
wirklich in diesen Calcul vorkommen) nichts weiter
als Grenzen der Verhältnisse von endlichen oder u
gränzten (indéfinies) Differenzen.

Man muß aber einräumen, daß dieser Begriff,
richtig er an sich auch seyn mag, nicht deutlich genug
um als Prinzip einer Wissenschaft, die ihre Zuverlä
keit auf Evidenz gründen soll zu dienen, und vornehm
um Anfängern vorgetragen werden zu können; überh
bin ich der Meynung: da man in der Differenzialrechn
so wie man sie anwendet, in der That unendlich kle
oder als unendlich klein vorausgesetzte Größen betrac
und berechnet; so bestehet die wahre Metaphysik di
Calculs darin, daß der Irrthum, der aus dieser falsc
Voraussetzung entsteht, durch einen andern Irrthum
bessert und ausgeglichen wird; durch den Irrthum n
lich, der aus der Verfahrungsart des Calculs entsteh
welchen zufolge man bey der Differenziirung nur die
endlich kleinen Größen derselben Ordnung zurück beh

We

Wenn man z. B. eine krumme Linie als ein Polygon
on unendlich vielen und zugleich unendlich kleinen Seiten
trachtet und die Verlängerung einer ſolchen Seite die
angente der krummen Linie iſt, ſo iſt klar, daß man
was Irriges vorausſetzt, aber der Irrthum wird in dem
alcul durch die Auslaſſung der unendlich kleinen Größen
ieder verbeſſert. Dieſes kann man ſehr leicht an Bey-
ielen zeigen, indeſſen würde es ſchwer ſeyn, davon ei-
n allgemeinen Beweis zu geben.

3.

Newton betrachtete, um die Vorausſetzung unend-
h kleiner Größen zu vermeiden, die mathematiſchen
rößen als ſolche, die durch Bewegung erzeugt würden,
nd er ſuchte eine Methode, um direkte die Geſchwindig-
iten, oder vielmehr das Verhältniß der veränderlichen
rößen, durch welche dieſe Größen hervorgebracht ſind,
beſtimmen. Dies nannte man nach ihm die Metho-
e der Fluxionen oder Fluxionsrechnung, weil
jene Geſchwindigkeiten Fluxionen der Größen
annte. Dieſe Methode oder dieſer Calcul ſtimmt dem
runde und dem Verfahren nach mit der Differenzial-
chnung überein, und unterſcheidet ſich davon nur durch
ie Metaphyſik, welche wirklich deutlicher zu ſeyn ſcheint,
eil Jedermann einen Begriff von der Geſchwindigkeit hat
der zu haben glaubt. Aber wenn man die Bewegung in
inen Calcul bringt, der nur algebraiſche Größen zum
egenſtande hat, ſo heißt das auf der einen Seite einen
egriff hineintragen, der ihm fremde iſt und der uns nö-
iget, dieſe Größen als Linien zu betrachten, welche von
inem beweglichen Dinge durchlaufen ſind; auf der an-

dern Seite muß man gestehen, daß man nicht einmal einen gehörig deutlichen Begriff von der Geschwindigkeit eines Punkts in jedem Augenblick habe, wenn diese Geschwindigkeit veränderlich ist; und man kann aus Maclaurius gelehrten Werke über die Fluxionen sehen, wie schwierig es ist, die Methode der Fluxionen strenge zu beweisen, und wie viel besondere Kunstgriffe man anwenden muß, um die verschiedenen Theile dieser Methode und ihren Beweis zu zeigen.

Newton selbst hat in seinem Buche Principia Mathematica &c. die Methode von den letzten Verhältnissen der verschwindenden Größen, als die kürzere vorgezogen; und man muß einräumen, daß auf die Principien dieser Methode bey der strengsten Zergliederung die Beweise, welche sich auf die Methode der Fluxionen beziehen reduciren. Aber diese Methode hat, so wie die Methode der Grenzen, wovon wir weiter oben geredet haben, und welche eigentlich nur eine algebraische Uebersetzung davon ist, die große Unbequemlichkeit, daß man die Größen in dem Zustande, wo sie so zu sagen aufhören, Größen zu seyn, betrachtet; denn wenn man gleich immer sehr gut das Verhältniß zweyer Größen sich vorstellen kann, so lange sie endlich bleiben, so giebt doch dies Verhältniß dem Verstande keinen deutlichen und bestimmten Begriff, sobald als seine beyden Glieder zugleich Null werden.

6.

Um diesen Schwierigkeiten auszuweichen, hat ein geschickter englischer Geometer, der wichtige Entdeckungen in der Analysis gemacht hat, in den neuern Zeiten vorgeschlagen, für die Methode der Fluxionen, welche bis dahin alle englische Geometer ängstlich befolgt haben, eine andere

andere rein analytiſche und der Differenzialmethode analoge zu ſubſtituiren, aber in welcher, ſtatt nur unendlich kleine Differenzen oder Nullen von veränderlichen Größen zu gebrauchen, man ſogleich verſchiedene Werthe dieſer Größen, einführt, die man in der Folge (nachdem man nemlich durch Diviſion den Factor, welcher dieſe Gleichheit zu Null machen würde, hat verſchwinden laſſen) gleich ſetzt. Hierdurch vermeidet man in der That die unendlich kleinen und verſchwindenden Größen; aber das Verfahren und die Anwendungen des Calculs ſind unbequem und eben nicht natürlich, und man muß eingeſtehen, daß dieſe Art, der Differenzialrechnung ſtrenger in ihren Principien zu machen, ihre hauptſächlichſten Vorzüge, Einfachheit der Methode und Leichtigkeit der Operationen, nimmt. Man vergleiche das Werk betittelt: The reſidual analyſis, a new branch of the algebric art by John Landen, London 1764. wie auch die Abhandlung deſſelben Verfaſſers über denſelben Gegenſtand, welche 1758 erſchien.

Dieſe Verſchiedenheiten in der Art die Principien der Differenzialrechnung zu gründen und darzuſtellen, und ſelbſt in der Benennung dieſes Calculs zeigen, wie mir ſcheint, daß man noch nicht die wahre Theorie gefunden hat, ob man gleich Anfangs die einfachſten und bequemſten Regeln des Mechanismus der Operationen entdeckt hatte.

7.

In einem der Memoiren der Akademie zu Berlin vom Jahre 1772 behauptete ich, daß die Entwickelung der Funktionen in einer Reihe die wahren Principien der Differenzialrechnung enthalte, und zwar unabhängig von der Betrachtung der unendlich kleinen Größen oder der Grenzen. Ich bewies durch dieſe Theorie den Lehrſatz des Taylor,

welchen man als Hauptprincip dieſes Calculs anſehen k
und den man bis dahin nicht anders als durch H
eben dieſes Calculs, oder durch die Betrachtung der
endlich kleinen Differenzen, bewieſen hat.

Nachher übergab Arbogaſt der Akademie der Wi
ſchaften eine ſchöne Abhandlung, worin dieſelbe Idee
Entwickelungen und Anwendungen auseinander geſetzt
die ihm gehören. Dieſes Werk ſoll den genannten
genſtand völlig erſchöpfen; da aber der Verfaſſer
nicht für gut gefunden hat es herauszugeben, und da
durch gewiſſe beſondere Umſtände genöthiget wurde,
allgemeinen Principien der Analyſis zu entwickeln, ſo ke
ich zu meinen ehemaligen Ideen über die allgemeinen Pri
pien der Differenzialrechnung zurück, und ſtellte neue Betr
tungen an, in der Abſicht ſie zu begründen und zu verallge
nern. Dies gerade hat dieſe Schrift veranlaßt, zu d
Herausgabe mich bloß die Vorſtellung von dem Nutzen
wog, den ſie für diejenigen haben kann, welche dieſen n
tigen Theil der Analyſis ſtudieren.

8.

Uebrigens kann es wunderbar ſcheinen, daß
Anſicht der Differenzialrechnung ſich nicht ſchon früher
Geometern dargeboten hat, uud beſonders daß ſie N
ton dem Erfinder von den Methoden der Reihen und
zionen, entgangen iſt. Aber wir wollen in dieſer Hin
bemerken, daß Newton wirklich anfangs die ei
che Betrachtung der Reihen nur angewandt hatte, um
dritte Problem des 2ten Buchs von den Principien,
zulöſen, in welchem er nemlich das Geſetz von dem Wi
ſtand auffucht, der nöthig iſt, damit ein ſchwerer Körper
gegebene krumme Linie frey beſchreibe, ein Probl
welches natürlich von der Differenzial- oder Flu

nalrechnung abhängt. Bekanntlich fand Joh. Bernoulli dieſe Auflöſung falſch, indem er ſie mit derjenigen verglich, welche die Differenzialrechnung giebt; und ſein Enkel Nicolas behauptete, daß der Irrthum daher käme, daß Newton das dritte Glied der convergirenden Reihe, durch welche er die Ordinate der gegebenen krummen Linie ausdrückte, für das zweyte Differenzial dieſer Ordinate, und das vierte für das dritte Differenzial genommen hätte, ſtatt daß nach den Regeln der Differenzialrechnung dieſe Glieder, das eine nur die Hälfte, das andere nur der ſechste Theil eben der Differenzialien ſind. (Man vergleiche die Memoiren der Akademie der Wiſſenſchaften vom Jahre 1711 und den erſten Band der Werke von Joh. Bernoulli). Newton gab, ohne weiter darauf zu antworten, ſeine erſte Methode ganz und gar auf, und lieferte in der 2ten Ausgabe der Principien eine andere Auflöſung deſſelben Problems, welche ſich auf der Methode der Differenzialrechnung ſelbſt gründete. Seit dem hat man nicht mehr von der Anwendung der Methode der Reihen auf dieſe Art von Problemen geſprochen, als wenn man des Fehlers erwähnen wollte, in welchen Newton gefallen war, und um die Nothwendigkeit fühlen zu laſſen, daß man auf Nicolas Bernoulli's Bemerkung Rückſicht nehmen müſſe. (Man vergleiche die Encyclopaedie artioul, differentiel, force). Wir werden aber zeigen, daß dieſer Fehler eigentlich gar nicht von der Methode ſelbſt herrühre, ſondern allein daher gekommen ſey daß Newton nicht alle Glieder, auf welche Rückſicht zu nehmen war, wirklich in Rechnung gebracht hatte, und wir werden auf dieſe Art ſeine erſte Auflöſung, deren keiner von den Commentatoren der Principien erwähnt, berichtigen.

9.

Unsere Absicht ist, in dieser Schrift, die Funktionen, welche aus der Entwickelung irgend einer Funktion entstehen, zu betrachten. Wir werden das Gesetz ihrer Bildung und ihrer Ableitung angeben, und die Anwendung davon auf die Umformung der analytischen Ausdrücke zeigen. Wir werden ferner eine Anwendung dieser abgeleiteten Funktionen auf die vorzüglichsten Probleme der Geometrie und der Mechanik, die zur Differenzialrechnung gehören, machen, und dadurch der Auflösung dieser Probleme die Strenge der Beweise der Alten geben. Endlich werden wir zeigen, daß der Calcul der Funktionen mit der eigentlichen Differenzialrechnung einerley sey, und wir werden dadurch die Principien und die von ihr bekannten Regeln unabhängig von aller Erdichtung und Metaphysik beweisen.

10.

Um aber nichts vergeblich zu behaupten, wollen wir mit der Untersuchung der Form der Reihe selbst, welche die Entwickelung einer jeden Funktion fx darstellen soll, wenn man $x + i$ statt x setzt, und die wir so angenommen haben, daß sie nur ganze und positive Potenzen von i enthalten soll, (no. 3). anfangen

Diese Voraussetzung bewährt sich wirklich durch die Entwickelung der verschiedenen bekannten Funktionen; aber niemand hat, so viel ich weiß, versucht sie a priori zu beweisen, und dies schien mir doch um so nothwendiger da es besondere Fälle giebt, wo sie nicht statt haben kann. Ueberdem führt die Differenzialrechnung ausdrücklich auf diese Annahme, und die Fälle die davon eine

Aus-

Ausnahme machen, ſind gerade die wo man dieſen Calcul einer Unzulänglichkeit beſchuldigt hat.

Ich werde zuvörderſt zeigen, daß in der Reihe welche aus der Entwickelung der Funktion $f(x + i)$ hervorgehet, ſich keine Bruchpotenz von i finden kann, zum wenigſtens wenn man x keine beſondere Werthe giebt.

Es iſt in der That deutlich daß die Wurzeln von i nur aus Wurzeln herkommen können, welche in der urſprünglichen Funktion fx mit enthalten ſind, und eben ſo deutlich iſt es, daß die Subſtitution von $x + i$ ſtatt x die Anzahl dieſer Wurzeln weder vermehren noch vermindern, noch ihre Natur verändern könne, ſo lange x und i unbeſtimmte Größen ſind. Auf der andern Seite weiß man durch die Theorie der Gleichungen, daß jede Wurzel eben ſo viele verſchiedene Werthe hat, als Einheiten in ihren Exponenten ſind, und daß folglich jede irrationale Funktion eben ſo viele verſchiedene Werthe hat, als man Combinationen der verſchiedenen Werthe der Wurzeln, welche ſie enthält, machen kann. Alſo wenn die Entwickelung der Funktion $f(x + i)$ ein Glied von der Form $ui^{\frac{m}{n}}$ enthalten könnte, ſo würde die Funktion fx nothwendig irrational ſeyn, und folglich eine gewiſſe Anzahl von verſchiedenen Werthe haben, welche zugleich für die Funktion $f(x + i)$ ſo wie für ihre Entwickelung gelten würden. Da aber dieſe Entwickelung durch die Reihe

$$fx + pi + qi^{\frac{m}{n}} + \ldots + ui^{\frac{m}{n}} + \ldots$$

dargeſtellt iſt, ſo würde jeder Werth von fx ſich mit einem jeden der n Werthe der Wurzel $\sqrt[n]{i^m}$ combiniren; ſo daß die Funktion $f(x + i)$ entwickelt mehr verſchiedene Wer-

Werthe haben würde als eben dieselbe Funktion unentwickelt: und das ist ungereimt.

Dieser Beweis ist allgemein und strenge, so lange als x und i unbestimmt bleiben; aber er würde es nicht mehr seyn, wenn man x bestimmte Werthe gebe; denn es wäre möglich, daß diese Werthe einige Wurzeln in fx aufhöben, die demungeachtet in $f(x + i)$ seyn könnten. Weiter unten no. 34 wollen wir diese besondern Fälle und daraus sich ergebenden Folgerungen untersuchen.

II.

Da wir uns nun von der allgemeinen Form der Entwickelung der Funktion $f(x + i)$ versichert haben, so wollen wir nunmehr insbesondere sehen, worin diese Entwickelung bestehet, und was jedes seiner Glieder bedeutet.

Man siehet sogleich, daß wenn man in dieser Funktion dasjenige sucht was von der Größe i unabhängig ist, so darf man nur $i = o$ machen, wodurch sie auf fx zurückgeführt wird. Also ist fx der Theil von $f(x + i)$, welcher übrig bleibt, wenn die Größe i Null wird; $f(x + i)$ wird also gleich seyn fx plus einer Größe die verschwinden soll, wenn man $i = o$ macht, und die folglich seyn wird, oder doch als in einer positiven Potenz von i multiplicirt gedacht werden kann: und da wir eben bewiesen haben, daß in der Entwickelung von $f(x+i)$ keine Bruchpotenz von i einschleichen kann, so folgt daraus, daß die in Rede stehende Größe nur mit einer ganzen positiven Potenz von i multiplicirt seyn kann; sie wird also von der Form iP seyn, wo P eine Funktion von x und i ist, die nicht unendlich wird, wenn $i = o$.

Man

Man wird alſo haben

$$f(x + i) = fx + iP, \text{ alſo}$$
$$f(x + i) - fx = iP,$$

und mithin durch i theilbar; nach verrichteter Diviſion, wird ſeyn

$$P = \frac{f(x + i) - fx}{i}$$

da nun P eine neue Funktion von x und i iſt, ſo kann man eben ſo davon trennen, was von i unabhängig iſt, und welches folglich nicht verſchwindet, wenn i Null wird. Es ſey alſo p dasjenige was aus P wird, wenn man $i = o$ macht, (p wird eine Funktion von x ohne i ſeyn) und durch ein den vorhergehenden ähnlichen Raiſonnement, wird man darthun das $P = p + iQ$, wo iQ der Theil von P iſt, der Null wird, wenn $i = o$ und Q eine neue Funktion von x und i iſt, die nicht unendlich wird, wenn $i = o$.

Man wird alſo haben

$$P - p = iQ,$$

und folglich durch i theilbar; nach geſchehener Diviſion, wird ſeyn

$$Q = \frac{P - p}{i}.$$

Es ſey q der Werth von Q, indem man darin $i = o$ macht, q wird eine Funktion von x ohne i ſeyn; und der Theil von Q, der Null wird, wenn i Null wird, wird wie hier oben von der Form iR ſeyn, wo R eine Funktion von x und i iſt, die nicht unendlich wird, wenn $i = o$, und die man finden wird, indem man $Q - q$ durch i dividirt: und ſo weiter.

$$R = \frac{\sqrt{(x+i)} + 3\sqrt{x}}{8x\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^3};$$

$$r = \frac{1}{10x^2\sqrt{x}}; \text{ &c.}$$

Man erhält alſo auf dieſe Art:

$$\sqrt{(x+i)} = \sqrt{x} + \frac{i}{\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}}$$

$$= \sqrt{x} + \frac{i}{2\sqrt{x}} - \frac{i^2}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^2}$$

$$= \sqrt{x} + \frac{i}{2\sqrt{x}} - \frac{i^2}{8x\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{(x+i)} + 3\sqrt{3}}{8x\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^3}$$

$$= \sqrt{x} + \frac{i}{2\sqrt{x}} - \frac{i^2}{8x\sqrt{x}} + \frac{i^3}{16x^2\sqrt{x}} - \text{ &c.}$$

Letztere Reihe findet man durch die gewöhnliche Ausziehung der Quadratwurzel, wie auch durch die Formel des Binomium.

13.

Es würde ſchwer fallen dieſe Operationen bey mehr zuſammengeſetzten irrationalen Funktionen auszuführen; wenn man aber die Irrationalität in Rückſicht der Größe i hinweg zu bringen ſucht, ſo wird alsdann die Anwendung dieſer Methode keine Schwierigkeit mehr haben.

Wenn wir alſo das ſo eben angeführte Beyſpiel wieder vornehmen, und von der Gleichung;

$$\sqrt{(x+i)} = \sqrt{x} + iP$$

ausgehen; ſo erhebe man ſie zum Quadrat um das i unter dem Wurzelzeichen zu befreyen, und wir bekommen, nachdem durch i dividirt iſt,

$$1 = 2P\sqrt{x} + iP^2;$$

und wenn $i = 0$ wird; ſo wird $P = p$, und man erhält

$$1 = p\sqrt{x};$$

daraus

$$p = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Man mache alſo

$$P = p + iQ;$$

dieſes vorausgeſetzt, bekömmt man nach der Diviſion durch i,

$$0 = \frac{1}{4x} + 2Q\sqrt{x} + \frac{iQ}{\sqrt{x}} + i^2Q^2.$$

Macht man $i = 0$, ſo wird $Q = q$; und man hat

$$\frac{1}{4x} + 2q\sqrt{x} = 0,$$

woraus man findet

$$q = -\frac{1}{8x\sqrt{x}}.$$

Man mache alſo

$$Q = q + iR;$$

und fahre ſo fort.

Es iſt gewiß daß man die Werthe von p, q, r, &c. geſchwinder finden würde, wenn man ſogleich die Gleichung

$$\sqrt{(x + i)} = \sqrt{x} + pi + qi^2 + ri^3 + \&c.$$

aufſetzt, ſie nun zum Quadrat erhebt, um das i unter dem Wurzelzeichen zu befreyen, und hernach die Glieder die mit einerley Potenzen von i behaftet ſind vergleicht, um daß dieſe Größe, wie vorausgeſetzt wird, unbeſtimmt bleiben könne; aber die vorhergehende Methode gewährt den Vortheil, daß man die Reihe nur ſo weit entwickeln, als es einem beliebt, und den genauen Wehrt des Reſtes angeben kann. In der That wollte man z. B. ſchon bey dem zweyten Gliede, pi einhalten, ſo würde der Werth des Reſtes Qi^2 ſeyn, und Q lieſſe ſich alsdann durch die Auflöſung der Gleichung von Q beſtimmen. Im obigen Beyſpiel iſt dieſe Gleichung

Durch dies Verfahren wird man haben,

$$\begin{aligned} f(x+i) &= fx + iP, \\ P &= p + iQ, \\ Q &= q + iR, \\ R &= r + iS, \end{aligned}$$

u. ſ. w.

Wenn man alſo nach und nach ſubſtituirt.

$$\begin{aligned} f(x+i) &= fx + iP \\ &= fx + ip + i^2Q \\ &= fx + ip + i^2q + i^3R \end{aligned}$$

u. ſ. w.

welches für die Entwickelung von $f(x+i)$, eine Reihe von der von uns Anfangs angenommenen Form geben wird.

12.

Es ſey, z. B. $fx = \frac{1}{x}$; ſo iſt

$$f(x+i) = \frac{1}{x+i}$$

alſo $iP = \frac{1}{x+i} - \frac{1}{x} = -\frac{i}{x(x+i)}$;

$$P = -\frac{1}{x(x+i)}; \quad p = -\frac{1}{x^2};$$

$$iQ = -\frac{1}{x(x+i)} + \frac{1}{x^2} = \frac{i}{x^2(x+i)};$$

$$Q = \frac{1}{x^2(x+i)}; \quad q = \frac{1}{x^3};$$

$$iR = -\frac{1}{x^3(x+i)} - \frac{1}{x^3} = -\frac{i}{x^3(x+i)};$$

$$r = -\frac{1}{x^4} \text{ &c.}$$

man

man bekömmt alſo

$$\frac{1}{x+i} = \frac{1}{x} - \frac{i}{x(x+i)}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{i}{x^2} + \frac{i^2}{x(x+i)}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{i}{x^2} + \frac{i^2}{x^3} - \frac{i^3}{x^3(x+i)} = \text{&c.}$$

wie dieſes aus der gewöhnlichen Diviſion hervorgeht.

Laßt uns zur Erläuterung noch die irrationale Funktion $\sqrt{x}$ vornehmen. Man hat alſo

$$fx = \sqrt{x}, \quad fx + i = \sqrt{(x+i)} = \sqrt{x} + iP;$$

alſo $$iP = \sqrt{(x+i)} - \sqrt{x} = \frac{i}{\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}};$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}}; \quad p = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$iQ = P - p = \frac{1}{\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{(x+i)}}{2\sqrt{x}\,[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]}$$

$$= -\frac{i}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^2};$$

$$Q = -\frac{1}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^2};$$

$$q = -\frac{1}{8x\sqrt{x}};$$

$$iR = Q - q$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{4x} - \frac{1}{[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{[\sqrt{(x+i)} + 3\sqrt{x}]\,[\sqrt{(x+i} - \sqrt{x}]}{4x\,[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^2}$$

$$= \frac{i}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{(x+i)} + 3\sqrt{x}}{4x\,[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^3};$$

R =

$$R = \frac{\sqrt{(x+i)} + 3\sqrt{x}}{8x\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^3};$$

$$r = \frac{1}{16x^2\sqrt{x}}; \text{ \&c.}$$

Man erhält alſo auf dieſe Art:

$$\sqrt{(x+i)} = \sqrt{x} + \frac{i}{\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}}$$

$$= \sqrt{x} + \frac{i}{2\sqrt{x}} - \frac{i^2}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^2}$$

$$= \sqrt{x} + \frac{i}{2\sqrt{x}} - \frac{i^2}{8x\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{(x+i)}+3\sqrt{3}}{8x\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}]^3}$$

$$= \sqrt{x} + \frac{i}{2\sqrt{x}} - \frac{i^2}{8x\sqrt{x}} + \frac{i^3}{16x^2\sqrt{x}} - \text{ \&c.}$$

Letztere Reihe findet man durch die gewöhnliche Ausziehung der Quadratwurzel, wie auch durch die Formel des Binomium.

13.

Es würde ſchwer fallen dieſe Operationen bey mehr zuſammengeſetzten irrationalen Funktionen auszuführen; wenn man aber die Irrationalität in Rückſicht der Größe i hinweg zu bringen ſucht, ſo wird alsdann die Anwendung dieſer Methode keine Schwierigkeit mehr haben.

Wenn wir alſo das ſo eben angeführte Beyſpiel wieder vornehmen, und von der Gleichung;

$$\sqrt{(x+i)} = \sqrt{x} + iP$$

ausgehen; ſo erhebe man ſie zum Quadrat um das i unter dem Wurzelzeichen zu befreyen, und wir bekommen, nachdem durch i dividirt iſt,

$$1 = 2P\sqrt{x} + iP^2;$$

und wenn $i = o$ wird; ſo wird $P = p$, und man erhält

$$1 = p\sqrt{x};$$

daraus

daraus

$$p = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

Man mache alſo

$$P = p + iQ;$$

dieſes vorausgeſetzt, bekömmt man nach der Diviſion durch i,

$$0 = \frac{1}{4x} + 2Q\sqrt{x} + \frac{iQ}{\sqrt{x}} + i^2Q^2.$$

Macht man $i = 0$, ſo wird $Q = q$; und man hat

$$\frac{1}{4x} + 2q\sqrt{x} = 0,$$

woraus man findet

$$q = -\frac{1}{8x\sqrt{x}};$$

Man mache alſo

$$Q = q + iR;$$

und fahre ſo fort.

Es iſt gewiß daß man die Werthe von p, q, r, &c. geſchwinder finden würde, wenn man ſogleich die Gleichung

$$\sqrt{(x + i)} = \sqrt{x} + pi + qi^2 + ri^3 + \&c.$$

aufſetzt, ſie nun zum Quadrat erhebt, um das i unter dem Wurzelzeichen zu befreyen, und hernach die Glieder die mit einerley Potenzen von i behaftet ſind vergleicht, um daß dieſe Größe, wie vorausgeſetzt wird, unbeſtimmt bleiben könne; aber die vorhergehende Methode gewährt den Vortheil, daß man die Reihe nur ſo weit entwickeln, als es einem beliebt, und den genauen Wehrt des Reſtes angeben kann. In der That wollte man z. B. ſchon bey dem zweyten Gliede, pi einhalten, ſo würde der Werth des Reſtes Qi^2 ſeyn, und Q lieſſe ſich alsdann durch die Auflöſung der Gleichung von Q beſtimmen. Im obigen Beyſpiel iſt dieſe Gleichung

$$i^2Q^2 + Q\left(2\sqrt{x} + \frac{i}{\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{4x} = 0.$$

und um ſie ſo aufzulöſen daß der Ausdruck für Q Größe i nicht mehr im Nenner enthalte, mache man

$$Q = \frac{1}{V}, \quad \frac{1}{y}$$

welches der Gleichung folgende Geſtalt geben wird,

$$V^2 + 4V(2x\sqrt{x} + i\sqrt{x}) + 4xi^2 = 0;$$

woraus hervorgeht:

$$V = -4x\sqrt{x} - 2i\sqrt{x} \pm 4x\sqrt{(x+i)};$$

und da Q nicht unendlich werden ſoll, wenn $i = 0$ (no. 11.), ſo muß V in demſelben Falle nicht Null werd man wird daher das untere Zeichen vor dem Wurzelzeic nehmen müſſen; man hat alſo

$$V = -2\sqrt{x}(2x + i) - 4x\sqrt{(x+i)},$$

und daraus

$$Q = -\frac{1}{2\sqrt{x}(2x+i) + 4x\sqrt{(x+i)}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{}}$$

wie oben. Man wird eben ſo in allen ähnlichen Fällen f fahren.

14.

Aber der größte Vortheil der ſo eben gezeig Methode, beſtehet darinn, daß ſie zeigt, wie Funktionen p, q, r, &c, aus der Haupfunktion fx, h vorgehen, und vorzüglich weil ſie darthut, daß die R iP, iQ, iR, &c., Größen ſind, welche verſchwinden len, wenn $i = 0$ wird; hieraus ziehen wir dieſe wicht Folgerung, daß in der Reihe

$$fx + pi + qi^2 + ri^3 + \text{&c.}$$

wel

welche aus der Entwickelung der Funktion $f(x + i)$ entſtehet, man i immer ſo klein nehmen kann, daß ein jedes Glied größer wird, als die Summe aller ihm nachfogenden Glieder; und daß daſſelbe auch für jeden noch kleinern Werth von i Statt findet.

Denn, da die Reſte iP, iQ, iR, &c. Funktionen von i ſind, die der Natur der Entwickelung ſelbſt gemäß, verſchwinden, wenn $i = o$ wird, ſo folgt daraus, daß wenn man die krumme Linie betrachtet, wovon i die Abciſſe ſeyn würde, und eine der Funktionen die Ordinate, dieſe krumme Linie die Axe im Anfangspunkte der Abciſſen ſchneiden wird; und wenn nur dieſer Punkt nicht ein ganz beſondrer (singulier) iſt, welches nur für ganz beſondere (particulières) Werthe von x ſtatt findet, wie man mit ein wenig Ueberlegung, und durch ein analoges Raiſonnement von Nr. 10, leicht einſieht, ſo wird der Lauf der krummen Linie nothwendigerweiſe von dieſem Punkte an ſtetig bleiben; ſie wird ſich alſo nach und nach der Axe nähern, ehe ſie ſchneidet, ſo daß ſie ſolcher um eine Größe näher kommt, die kleiner als jede gegebene Größe iſt; man wird alſo immer eine Abciſſe i finden können, welche zu einer Ordinate gehört, die kleiner als eine gegebene Größe iſt; und alsdann wird jeder kleinere Werth von i, auch noch kleinern Ordinaten als die gegebene Größe iſt entſprechen.

Man kann alſo ſo klein nehmen, ohne daß es Null ſey, damit iP geringer als fx, iQ geringer als p, und iR geringer als q u. ſ. w. ſey; und mithin nun, i^2R kleiner werde als iq; i^2R kleiner als i^2q, &c.. Da alſo (Nr. 11.)

$$iP = ip + i^2q + i^3r + \&c.$$
$$i^2Q = i^2q + i^3r + \&c.$$
$$\text{und } i^3R = i^3r + \&c.$$

so folgt daraus, daß man dem i immer einen so geringen Werth geben kann, daß jedes Glied der Reihe $fx + ip + i^2q + i^3r + \&c.$ größer werde, als die Summe aller folgenden Glieder; und alsdann wird auch ein jeder noch kleinere Werth von i dieselben Bedingungen erfüllen.

Man soll diesen Lehrsatz als einen der Fundamentalsätze der hier vorzutragenden Theorie ansehen; er wird stillschweigend in der Differenzial- und Fluxionenrechnung vorausgesetzt; und hier ist es, wo man mit Recht sagen kann, daß diese Calculs die meisten Blößen geben, vorzüglich in ihrer Anwendung auf geometrische und mechanische Aufgaben.

15.

Es ist übrigens leicht einzusehen, daß das eben gezeigte Verfahren, um die Glieder der Reihe, die eine Funktion von $x + i$ vorstellt, welche nach den Potenzen von i entwickelt ist, eins nach dem andern zu finden, überhaupt für jede Funktion von $x + i$ angewendet werden kann, wenn nur diese Funktion auf eine Reihe gebracht werden kann, die wie die positiven und ganzen Potenzen von i fortgeht. Denn das, was in Nr. 9. bewiesen worden ist, daß nehmlich jede Funktion von $x + i$ allgemein gesagt diese Gestalt annehmen kann, läßt sich nicht allgemein auf eine jede beliebige Funktion von $x + i$ anwenden. In den Fällen aber, wo diese Reduktion möglich ist, wird man immer für die aus der Entwickelung nach steigenden Potenzen

tenzen von i entſtehende Reihe, daſſelbe folgern können, was wir Nr. 14 fanden; daß nemlich die Größe i ſo klein genommen werden kann, daß ein jedes Glied der Reihe größer ſey, als alle folgenden zuſammen genommen.

16.

Nach dieſen allgemeinen Betrachtungen über die Entwickelung der Funktionen, wollen wir die Formel (Nr. 3) genauer betrachten:

$$f(x + i) = fx + pi + qi^2 + ri^3 \text{ &c.}$$

und ſuchen, wie die daraus hergeleiteten Funktionen p, q, r, &c. von der Hauptfunktion fx abhängen.

Zu dieſem Endzwecke wollen wir vorausſetzen, daß die unbeſtimmte Größe x, gleich $x + o$, werde, wo o eine ebenfalls unbeſtimmte von i unabhängige Größe iſt, ſo wird man gleich ſehen, daß $f(x + i)$ zu $f(x + i + o)$ wird; man ſieht zugleich, daß man daſſelbe erhalten würde, wenn man bloß $i + o$, ſtatt i, in der Funktion $f(x + i)$ ſetzte. Man erhält alſo auch daſſelbe, wenn man in der Reihe

$$fx + pi + qi^2 + ri^3 + \text{&c.}$$

$i + o$, ſtatt i, oder $x + o$ ſtatt x nimmt. Das erſtere Subſtituiren giebt

$$fx + p(i + o) + q(i + o)^2 + r(i + o)^2 \text{ &c.}$$

Entwickelt man die Potenzen von $i + o$ u. ſchreibt, wegen mehrerer Einfachheit nur die beyden erſten Glieder jeder Potenz, weil die Vergleichung dieſer Glieder zu den Beſtimmungen, die wir nöthig haben, hinreichen: ſo erhält man

$$fx + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 \text{ &c.}$$
$$+ po + 2qio + 3ri^2o + 4si^3o \text{ &c.}$$

Das zweyte Subſtituiren giebt

$$fx + f'xo + \&c.;\quad p + p'o + \&c.$$
$$q + q'o + \&c.;\quad r + r'o + \&c.$$

dieſe Geſtalt bekommen nemlich die Funktionen $fx, p, q, r, \&c.$ Wenn man ſtatt x, $x + o$ ſetzt; und wenn man in der Entwickelung nur die Glieder betrachtet, welche die erſte Potenz von o enthalten, ſo iſt klar, daß man folgende Formel erhält.

$$fx + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 + \&c.$$
$$+ f'xo + p'io + q'i^2o + r'i^3o + \&c.$$

Da nun dieſe Reſultate identiſch ſeyn müſſen, was auch immer die Werthe von i und o ſeyn mögen, ſo erhält man, wenn man die Glieder, worinn ſich $o, io, i^2o, \&c.$ befindet, vergleichet.

$$p = f'x,$$
$$2q = p'$$
$$3r = q'$$
$$4s = r' \&c.$$

Weil nun, ſo wie $f'x$, die erſte von fx hergeleitete Funktion iſt, ſo iſt klar, daß p' die erſte von p hergeleitete Funktion, q' von q, r' von r u. ſ. w. Wenn man alſo mehrerer Einfachheit und Einförmigkeit wegen, durch $f'x$. die erſte von fx hergeleitete Funktion; andeutet, durch $f''x$ die erſte von $f'x$ hergeleitete, durch $f'''x$ die von $f''x$ hergeleitete u. ſ. w.; ſo hat man $p = f'x$, und daher $p' = f''x$; alſo

$$q = \frac{p'}{2} = \frac{f''x}{2}; \text{ ferner}$$

$$q' = \frac{f'''x}{2}, \text{ und daraus}$$

$$r = \frac{q'}{3} = \frac{f'''x}{2 \cdot 3}; \text{ alſo}$$

$$r' = \frac{f'^{v}x}{2 \cdot 3}, \text{ und folglich}$$

$$s = \frac{r'}{4} = \frac{f'^{v}x}{2.3.4}; \text{ u. ſ. w.}$$

Subſtituirt man nun dieſe Werthe in der Entwickelung der Funktion $fx + i)$ ſo bekömmt man:

$$f(x+i) = fx + f'xi + \frac{f''x}{2} i^2 + \frac{f'''x}{2.3} i^3 + \frac{f'^{v}x}{2.3.4} i^4 \text{ &c.}$$

Dieſer neue Ausdruck hat den Vorzug, daß man ſieht, wie die Glieder der Reihe eines von dem andern abhängen, und vorzüglich, wie, wenn man die erſte Funktion zu machen weiß, welche von irgend einer urſprünglichen Funktion abgeleitet iſt, man alle abgeleitete Funktionen, welche die Reihe enthält, machen könne.

17

17) Wir wollen die Funktion fx, **urſprüngliche Funktion** nennen, in Rückſicht der Funktionen $f'x$, $f''x$ &c. welche daraus hergeleitet werden, und letztere mögen in Rückſicht jener **abgeleitete Funktionen** heißen. Ferner die erſte abgeleitete Funktion $f'x$, ſoll **erſte Funktion** heißen, die zweyte abgeleitete Funktion $f''x$, **zweyte Funktion**; die dritte abgeleitete Funktion, ſoll **dritte Funktion** heißen u. ſ. w.

So daß wenn ~~x zu $x+i$ wird~~, $y = fx$, x zu $x+i$ wird

$$y = y + y'i + \frac{y''i^2}{2.} + \frac{y'''i^3}{2.3.} + \text{&c.}$$

werden muß.

18.

Wenn man alſo nur ein Mittel weiß, die **erſte Funktion** einer jeden urſprünglichen Funktion zu finden, ſo wird man durch bloßes Wiederholen deſſelben Verfahrens alle abgeleitete Funktionen erhalten, und folglich alle Glieder der Reihe, die aus der Entwickelung der urſprünglichen Funktion entſtehen.

Es ſey $fx = x^m$, ſo hat man

$$f(x + i) = (x + i)^m;$$

nun iſt aber leicht zu beweiſen, es ſey durch die einfachen Regeln der Arithmetik, oder durch die erſten Operationen der Algebra, daß die beyden erſten Glieder der mten Potenz des Binomii $x + i$, $x^m + mx^{m-1}i$, ſind, es mag m, eine ganze oder gebrochene, poſitive oder negative Zahl ſeyn. Man bekömmt alſo

$$f'x = mx^{m-1},$$

Eben ſo findet man hieraus

$$f''x = m(m - 1)x^{m-2};$$

$$f'''x = m(m - 1)(m - 2)x^{m-3} \text{ &c.}$$

ſo daß man haben wird

$$(x+i)^m = x^m + mx^{m-1}i + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}i^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}i^3 + \text{u. ſ. w.}$$

welches die Formel des Binomii iſt, die ſolchergeſtalt für jeden Werth von m erwieſen iſt.

19.

Es ſey zweytens

$$fx = a^x;$$

ſo hat man

$$f(x + i) = a^{x+i} = a^x a^i.$$

Es ſchränkt ſich alſo das ganze Verfahren darauf ein, die beyden erſten Glieder der Reihe a^i zu finden, welche nach den Potenzen von i entwickelt iſt.

Zu dieſem Ende ſey $a = 1 + b$, ſo iſt

$$a^i = (1+b)^i = 1 + ib + \frac{i(i-1)}{2}b^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{2.3}b^3 + \text{&c.}$$

mittelſt der Formel, die wir ſo eben bewieſen haben.

Wenn

Wenn man die Produkte von i, i — 1, i — 2 &c. entwickelt, und die Glieder nach den Potenzen von i ordnet, ſo wird man finden, daß die durch i multiplicirten Glieder ſind

$$i(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \&c.).$$

Man ſetze nun zur Abkürzung

$$A = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \&c.$$

$$= a - 1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \&c.$$

ſo ſind die beyden erſten Glieder des Werthes von a^i in der Reihe, $= 1 + Ai$; man hat alſo $f'x = Aa^x$. Hieraus bekömmt man mittelſt derſelben Operation, die man wiederhohlt,

$$f''x = A \cdot Aa^x = A^2a^x.$$

$$f'''x = A^3a^x \&c.$$

So erhält man alſo $f(x + i) = a^{x+i}$

$$= a^x(1 + Ai + \frac{A^2i^2}{2} + \frac{A^3i^3}{2 \cdot 3} + \&c.)$$

Dividirt man durch a^x, und ſetzt i ſtatt x, ſo wird man die bekannte Reihe erhalten

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^3x^3}{2 \cdot 3} + \&c.$$

20.

Wenn man in dieſer Formel $x = 1$ nimmt, ſo hat man

$$a = 1 + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{2 \cdot 3} + \&c.$$

und wenn man $x = \frac{1}{A}$ ſetzt, erhält man,

$$a^{\frac{1}{A}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}$$

Alſo iſt die Größe $a^{\frac{1}{A}}$ einer beſtändigen Zahl gleich, welche der Werth von a für $A = 1$ iſt, und dieſe Zahl, die durch die vorhergehende Reihe beſtimmt wurde, iſt

$$= 2,71828,18284\,59045\ldots.$$

Dies iſt die Zahl die man gewöhnlich durch e bezeichnet; ſo daß die Beziehung zwiſchen a und A, auf eine endliche Art ſo ausgedrückt iſt

$a^{\frac{1}{A}} = e$; dieſe giebt $a = e^{A}$.

Es iſt aber in der Gleichung $y = a^x$, x der ſogenannte Logarithme von y, wenn a die Grundzahl des logarithmiſchen Syſtems iſt, das heißt die Zahl, wovon der Logarithme die Einheit iſt; ſo daß dieſe Gleichung $x = \log. y$, für die Grundzahl a gilt; und es wird aus demſelben Grunde, die Gleichung

$$a^{\frac{1}{A}} = e, \quad e^{\frac{1}{A}},$$

als den Logarithmen von e geben, wenn a die Grundzahl iſt, und $A = \log. a$, wenn e die Grundzahl iſt.

In dem gewöhnlichen Logarithmen-Syſtem hat man die Grundzahl $a = 10$ genommen, weil dieſe Logarithmen für die arithmetiſchen Rechnungen bequemer ſind; in der Analyſis aber nimmt man lieber das Syſtem an, deſſen Grundzahl die Zahl e iſt; dieſes iſt das Neperſche Logarithmen-Syſtem welches gewöhnlich das hyperboliſche genannt wird, weil ſie durch die Fläche der gleichſeitigen Hyperbel zwiſchen ihren Aſymtoten dargeſtellt ſind; und man bezeichnet ſie durch ein einfaches l. Alſo hat man $A = la$; daher auch die erſte Funktion von der Funktion a^x, ſo ausgedrückt $a^x la$ wird (no. 19). Da übrigens $a = e^{A}$

ſo

ſo hat man $a = e^{la}$, und folglich $a^x = e^{xla}$; man iſt alſo dadurch im Stande, alle exponential Größen zu einerley Grundzahl e zurück zu führen

21.

Es ſey alſo drittens $fx = \log. x$, ſo erhält man wegen der Natur der Logarithmen $x = a^{fx}$. Wird nun x zu $x + i$, ſo wird

$$fx = f(x + i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \&c.$$

Macht man nun, um abzukürzen,

$$o = if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \&c.$$

ſo wird die Gleichung $x = a^{fx}$ (wenn man, ſtatt x, $x + i$ ſetzt) $fx + i\frac{x}{i} = a^{fx+o} = a^{fx}a^o$; und wenn man dieſe Gleichung durch die vorhergehende dividirt, erhält man

$$1 + \frac{i}{x} = a^o = 1 + Ao + \frac{A^2o^2}{2} + \&c. \text{ (no. 19)}$$

Streicht man auf beiden Seiten die Einheit weg, und dividirt durch i, nachdem man den Werth von o ſubſtituirt hat, ſo erhält man, wenn man nach den Potenzen von i ordnet,

$$\frac{1}{x} = Af'x + \frac{i}{2}(Af''x + A^2f'x^2) + \&c.$$

Da die Größe i unbeſtimmt iſt und bleiben ſoll, ſo muß dieſe Gleichung unabhängig von dieſer Größe wahr ſeyn. Es werden daher alle Glieder, worinn eine und dieſelbe Potenz von i vorkömmt ſich unter einander aufheben, und eben ſo viel beſondere Gleichungen bilden; ſo daß man

$\frac{1}{x} = Af'x$ hat und eben ſo

$$Af''x + A^2f'x^2 = 0, \text{ u. ſ. w.}$$

Iſt

Ist also $fx = \log. x$, so wird allgemein

$$f'x = \frac{1}{Ax} = \frac{1}{xla} \text{ (no. 20) seyn;}$$

Hieraus ergiebt sich nun wegen der allgemeinen Formel no. 18.

$$f''x = -\frac{1}{x^2 la}$$

$$f'''x = \frac{2}{x^3 la},$$

$$f^{IV}x = -\frac{2.3}{x^4 la} \text{ &c.}$$

welche Werthe den weiter oben gefundenen Gleichungen völlig gnüge leisten. Substituirt man nun diese Werthe in der Reihe

$$fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \text{&c.}$$

so erhält man sogleich

$$\log.(x + i) = lx + \frac{i}{xla} - \frac{i^2}{2x^2 la} + \frac{ii^2}{2.3x^3 la} - \text{&c.}$$

Macht man $x = 1$ und aus i, x; so erhält man die bekannte Formel;

$$\log.(1 + x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{&c.}}{la}.$$

Für die hyperbolischen Logarithmen oder $la = 1$. bekömmt man bloß

$$fx = lx, f'x = \frac{1}{x} = f''x = -\frac{1}{x^2} \text{ &c.}$$

22.

Die Formeln für die Entwickelung der exponential Grösen und der Logarithmen, in Reihen, sind hinlänglich bekannt,

kannt, und man beweißt ſie theils mittelſt der Differenzialrechnung, theils durch die bloße Formel des Binomii, indem man nemlich das unendlich Große und das unendlich Kleine in Betrachtung zieht, wie man es auch in Eulers Introductio in analyſin findet. Obgleich dieſe Beweiſungsart, wovon, wie ich glaube, Halley der Erfinder iſt, (Trans. phil. no. 216.) in der Analyſis aufgenommen werden kann, ſo muß man doch geſtehen, daß es ihr an derjenigen Evidenz und Strenge fehlt, welche in den Anfangsgründen einer Wiſſenſchaft verlangt wird. Man wird es uns daher gewiß verzeihen, wenn wir hier eine kleine Ausſchweifung machen, um einen Beweis derſelben Formeln zu geben, welcher ſich zwar auch auf den Binomiſchen Lehrſatz gründet, wobey aber die Lehre des Unendlichen gar nicht in Betrachtung kömmt. Wir wollen dieſe Formeln ſogar in ſolcher Allgemeinheit ausdrücken, daß man wird im Stande ſeyn, die Reihen in jedem Falle ſo convergirend als möglich zu machen.

Wir wollen nun die allgemeine Gleichung betrachten, $y=a^x$, worin x der Logarithme von y iſt, wenn a die Grundzahl iſt; ſtatt a will ich $1+a-1$ ſetzen, welches $=a$ iſt; und hernach ſtatt $(1+a-1)^x$, $[(1+a-1)^n]^{\frac{x}{n}}$, welches dem a^x ganz gleich iſt; ſo hat man

$$y = [(1+a-1)^n]^{\frac{x}{n}}$$

wo n eine jede Größe iſt, die in dem Werthe von y von ſelbſt verſchwindet.

Entwickelt man nun das Binomium $(1+a-1)^n$ in der Reihe

$$1+n(a-1)+\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}(a-1)^3 \text{ &c.}$$

und

und ordnet die Glieder nach den Potenzen von n, ſo erhält

$$(1 + a - 1)^n = 1 + An + Bn^2 + \&c.$$

weil die Coeffizienten A, B, &c. durch a gegeben ſind, und ſo findet man ſogleich

$$A = a - 1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \&c.$$

wo dieſe Größe A dieſelbe als in no. 19 iſt. Was die andere Coeffizienten anbelangt, ſo wird es nicht nöthig ſeyn, ſie aufzuſuchen, denn ſie verſchwinden aus der Rechnung, wie man ſogleich ſehen wird.

Setzen wir dies zum voraus, ſo erhalten wir

$$y = (1 + An + Bn^2 + \&c.)^{\frac{x}{n}}$$

und dieſes wie beym Binomium entwickelt giebt

$$y = 1 + \frac{x}{n}(An + Bn^2 + \&c.) + \frac{x(x-n)}{2n^2}(An + Bn^2 + \&c.)^2 + \frac{x(x-n)(x-2n)}{2.3.n^3}(An + Bn^2 + \&c.)^3 + \&c.$$

und wenn man die Potenzen von n, die der Zähler und Nenner gemein hat, wegſtreicht:

$$y = 1 + x(A + Bn + \&c.) + \frac{x(x-n)}{2}(A + Bn + \&c.)^2 + \frac{x(x-n)(x-2n)}{2.3.}(A + Bn + \&c.)^3 + \&c.$$

Da nun die Größe n willkührlich iſt, und wegen der Natur ſelbſt der Funktion y aus der Formel dieſer Funktion verſchwinden muß, ſo müſſen auch alle mit dieſer Größe n multiplizirten Glieder zu Null werden. Nimmt man daher von dieſen Gliedern weiter keine Notiz, weil ſie verſchwinden müſſen, welchen Wehrt auch n haben mag, ſo behält man bloß

y =

$$y = a^x = 1 + x\,A + \frac{x^2A^2}{2} + \frac{x^3A^3}{2.3} + \&c.$$

wie oben (no. 19)

23.

Laßt uns jetzt auf gleiche Art den Werth von x in y ſuchen. Zu dieſem Ende bringen wir die Gleichung

$$a^x = y$$

unter dieſe Geſtalt:

$$(1 + a - 1)^{nx} = (1 + x - 1)^n;$$

die identiſch mit der vorhergehenden iſt, und n iſt hier ebenfalls nur eine willkührliche Größe, die in dem Werthe von x in y, keinen Einfluß hat.

Entwickelt man die zwey Glieder wie beym Binomium ſo hat man

$$1 + nx(a-1) + \frac{nx(nx-1)}{2}(a-1)^2 + \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{2.3}(a-1)^3 + \&c.$$

$$= 1 + n(y-1) + \frac{n(n-1)}{2}(y-1)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}(y-1)^3 + \&c.$$

bringt man beyderſeits die Einheit weg und dividirt durch n, ſo bekömmt man:

$$x(a-1) + \frac{x\,nx-1)}{2}(a-1)^2 + \frac{x\,nx-1)(nx-2)}{2.3}(a-1)^3 c.$$

$$= y - 1 + \frac{n-1}{2}(y-1)^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2.3}(y-1)^3 + \&c.$$

Da-

Da n nun, wie wir schon gesagt haben, eine ganz willkührliche Größe ist, die in dem Werthe von x in y keinen Einfluß hat, so müssen die durch n multiplizirten Glieder sich gänzlich vernichten und nur die übrig bleiben, wo sich die Größe n nicht befindet. So erhält man, wenn man nur diese letzteren betrachtet, folgende Gleichung, worinn zur Abkürzung die oben schon bestimmte Größe A gebraucht wird

$$xA = y - 1 - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 - \&c.$$

woraus erhellet daß

$$x = \log. y = \frac{y - 1 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \&c.}{A}$$

eine bekannte Formel die mit der im §. 21. übereinkommt, wo $A = la$.

24.

Aber diese Formel ist nur convergent wenn die Zahl y, wovon sie den Logarithmen giebt, von der Einheit wenig unterschieden ist. Sie ist auch von keinem Nutzen, wenn man mit den gewöhnlichen Logarithmen rechnet. Hier ist nun ein Mittel sie für jede Zahl convergirend zu machen.

Es ist klar, daß die Hauptgleichung $y = a^x$, in diese $y^m = a^{mx}$, verändert werden kann, wo m jede ganze oder gebrochene Zahl seyn darf. Bedient man sich nun letzterer Formel statt der ersten, so braucht man nur y in y^m, und x in mx zu verwandeln, und man hat ganz allgemein

$$x = \log. y = \frac{y^m - 1 - \frac{1}{2}(y^m-1)^2 + \frac{1}{3}(y^m-1)^3 - \&c.}{mA.}$$

wo man für m einen Bruch wie $\frac{1}{r}$ nehmen kann, so daß $\sqrt[r]{y}$, immer eine von der Einheit so wenig als man will unterschiedene Zahl sey.

Sei

Setzen wir voraus, (welches immer möglich iſt), daß die rte Wurzel von y, nur die Einheit vor dem Komma enthalte, und daß ſich nach dem Komma s Nullen befinden, ſo ſieht man leicht ein, daß, wenn man bey 2s Dezimalſtellen einhält, das Glied $(y^m - 1)^2$, und um ſo mehr die folgenden Glieder nichts geben werden, ſo daß man in dieſem Falle bloß erhält

$$x = \frac{y^m - 1}{mA} \text{ oder } r \frac{\sqrt[r]{y} - 1}{A}$$

Auf dieſelbe Art erhält man unter denſelben Bedingungen

$$A = r(\sqrt[r]{a} - 1), \text{ und folglich}$$

$$x = \frac{\sqrt[r]{y} - 1}{\sqrt[r]{a} - 1}.$$

Mittelſt dieſer Formel hat Brigs die erſten Logarithmen berechnet. Er hatte nemlich bemerkt, daß wenn man aus einer beliebigen Zahl, Quadrat-Wurzeln fortgeſetzt ausziehet, und bey dieſem Wurzelausziehen ſtehen bleibt, wenn doppelt ſo viel Dezimalſtellen als Nullen hinter der Einheit vorhanden ſind, und vor dem Komma nur noch die Einheit ſtehet; daß alsdann die Dezimaltheile dieſer letzten Wurzel grade die Hälfte der Decimaltheile der vorletzten Wurzel ausmachen, ſo daß dieſe Dezimaltheile unter ſich gerade daſſelbe Verhältniß haben als die Logarithmen der Wurzeln ſelbſt; dieſes geht aber augenſcheinlich aus den obigen Formeln hervor.

Nehmen wir nun $r = 2^{60}$, ſo finden wir für $a = 10$

$\sqrt[r]{a} = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00199\ 71742\ 08125\ 50327.$

$\frac{1}{r} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00086\ 73617\ 37978\ 40374.$

So daß $\frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt[r]{a} - 1} = \frac{867361737988403254}{1997174208125505 27}$.

$= 0{,}43429\ 44819\ 03251 \ldots = \frac{1}{A} = \frac{1}{la} = \log.\ e.$

Will man z. B. den Logarithmen von 3 haben, so nehme man $y = 3$, und indem man gleichergestalt 60mal die Quadrat-Wurzel ausziehet, findet man

$\sqrt[r]{y} = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00095\ 28942\ 64074\ 58932 \ldots$

und hieraus

$x = \log.\ y = \frac{\sqrt[r]{y} - 1}{\sqrt[r]{a} - 1} = \frac{952894264074589 32....}{1997174208125505 27...}$

$= 0,\ 47712\ 12547\ 19662....$

Diese Methode giebt, wie man sieht, viel Arbeit, wegen der großen Anzahl Wurzelausziehungen, die erfordert werden, wenn man mehrere Dezimalstellen finden will; indessen dient die allgemeine Formel für den Ausdruck von x in y, den wir oben gegeben haben, diese Methode zu vereinfachen und zu vervollständigen; denn es sey die Größe y welche sie wolle, so wird es doch hinreichend seyn, nur einige Quadratwurzeln daraus zu ziehen bis man auf eine Zahl y^m oder $\sqrt[r]{y}$ kommt, wo äusser der Einheit vor dem Komma keine Zahl mehr befindlich ist. Alsdann werden die Potenzen von $y^m - 1$ Brüche seyn und um so kleinere Brüche, je höher die Potenzen seyn werden; es wird daher die Reihe convergirend genug werden, so daß es hinreichend seyn wird, eine geringe Anzahl Glieder zu nehmen.

25.

Man kann obige Methode dazu anwenden, die Reihen zu finden, die den Sinus aus den Bogen, oder den Bogen aus den Sinus ausdrücken, welches zu verrichten man ſich auch (wie Euler in genanntem Werke gethan hat) der endlichen und des unendlich Kleinen bedient.

Es iſt wahr, wenn man von der bekannten Formel ausgeht, die zur Multiplikation der Winkel dient,

$$\cos. nx + \sin. nx\sqrt{-1} = (\cos. x + \sin. x\sqrt{-1})^n,$$

ſo erhält man wechſelſeitig

$$\cos. x + \sin. x\sqrt{-1} = (\cos. nx + \sin. nx\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}$$

wo n willkührlich genommen werden kann.

Es ſey nun der Ausdruck für sin. x in der Reihe des Bogens x welcher er wolle, ſo kann er nur folgende Geſtalt haben $Ax + Bx^2 +$ &c.; denn da der Sinus zu Null wird, wenn der Bogen $= 0$, ſo iſt ſichtbar, daß dieſer Ausdruck kein einziges Glied ohne x haben kann. Da nun $\cos. x = \sqrt{[1 - (\sin. x^2)]}$ ſo hat man

$$\cos. x = \sqrt{(1 - A^2x^2 - 2ABx^3 - \text{&c.})}$$

$$= 1 - \frac{A^2 . x^2}{2} + \text{&c.}$$

Es iſt bekannt, daß die Coeffizienten A, B, &c. vom Bogen x unabhängig ſind; folglich werden ſie es auch von jedem andern Bogen ſeyn. Subſtituirt man nun nx für x, ſo hat man ebenfalls:

$$\sin. nx = nAx + n^2Bx^2 + \text{etc.}$$

$$\cos. nx = 1 - \frac{n^2A^2x^2}{2} + \text{etc.}$$

Die vorhergehende Gleichung wird alſo dieſe Geſtalt erhalten:

$$\cos. x + \sin. x\sqrt{-1} = [1 + nAx\sqrt{-1} + n^2(B\sqrt{-1} - \frac{A^2}{2}) x^2 + \text{etc.}]^{\frac{1}{n}}.$$

Entwickeln wir die zweyte Hälfte nach der Art des Binomii, und machen zur Abkürzung

$$X = Ax\sqrt{-1} + n(B\sqrt{-1} - \frac{A^2}{2})x^2 + \text{etc.}$$

so erhalten wir

$$\cos.x+\sin.x\sqrt{-1} = 1+\frac{1}{n}(nX)+\frac{1-n}{2n^2}(nX)^2 + \frac{(1-n)(1-2n)}{2.3.n^3}(nX)^3 + \&c.$$

$$= 1 + X + \frac{1-n}{2}X^2 + \frac{(1-n)(1-2n)}{2.3.}X^3+\&c.$$

Da die Werthe von sin. x und cos. x unabhängig von der willkührlichen Größe n seyn müssen, so folgt, daß alle Sätze der zweyten Hälfte, die mit derselben Potenz von n multiplizirt sind, sich von selbst vernichten müssen. Bemerkt man also bloß die Sätze, worinn n sich nach der Entwickelung nicht befindet, so wird es leicht werden einzusehen, daß die Größe X sich auf den ersten Satz reduzirt, nemlich:

$$X = Ax\sqrt{-1};$$

und daß die Coeffizienten der Potenzen von x nur noch diese sind $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2.3}$ &c. Auf diese Art bekömmt man

$$\cos.x+\sin.x\sqrt{-1} = 1+Ax\sqrt{-1}+\tfrac{1}{2}(Ax\sqrt{-1})^2+\frac{1}{2.3}(Ax\sqrt{-1})^3+\text{etc.}$$

Macht man wirklich die Potenzen von $\sqrt{-1}$, und vergleicht die reellen Theile der beyden Hälften, so wie die imaginären, jede zusammen unter sich, so erhält man

$$\sin.x = Ax - \frac{A^3x^3}{2.3} + \frac{A^5x^5}{2.3.4.5.} - \text{etc,}$$

$$\cos.x = 1 - \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^4x^4}{2.3.4.} - \text{etc.}$$

26.

Um eben ſo den Werth von x im sin. und cos. von x zu haben, nehme man die Grundgleichung wieder vor

$$\cos. nx + \sin. nx\sqrt{-1} = (\cos. x + \sin. x\sqrt{-1})^n,$$

in welcher man ſtatt sin. nx und cos. nx ihre Werthe in die Reihe

$$nAx + n^2Bx^2 \text{ etc. } 1 - \frac{n^2A^2x^2}{2} + \text{etc.}$$

ſetzen kann; und man entwickele auf dieſe Art die Potenz n der zweyten Hälfte. Man erhält alſo

$$1 + nAx\sqrt{-1} + n^2\left(B\sqrt{-1} - \frac{A^2}{2}\right)x^2 + \text{etc.}$$

$$= (\cos. x^n)\left[1 + n\frac{\sin. x}{\cos. x}\sqrt{-1} + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{\sin. x}{\cos. x}\sqrt{-1}\right)^2 + \text{etc.}\right].$$

Nun iſt

$$\frac{\sin. x}{\cos. x} = \text{tang. x, und } \cos. x = \sqrt{(1 - \sin. x^2)}; \text{ alſo}$$

$$(\cos. x)^n = (1 - \sin. x^2)^{\frac{n}{2}} = 1 - \frac{n}{2}\sin. x^2 + \frac{n(n-2)}{2,4}\sin. x^4 \text{ etc.}$$

Subſtituirt man dieſe Werthe, ſo wird ſich die Größe n nur noch in den Coeffizienten zeigen, und ordnet man die Sätze nach den Potenzen dieſer Größe, ſo bekömmt die zweyte Hälfte folgende Geſtalt

$$1 + nP + n^2Q + \text{etc.}$$

Um abzukürzen mache man

$$P = \text{tang. x}\sqrt{-1} - \tfrac{1}{2}\text{tang. x}\sqrt{-1})^2 + \tfrac{1}{3}(\text{tang. x}\sqrt{-1})^3 - \text{etc.}$$
$$- \tfrac{1}{2}\sin. x^2 - \tfrac{1}{4}\sin. x^4 - \tfrac{1}{6}\sin. x^6 + \text{etc.}$$
$$Q = \tfrac{1}{2}(\text{tang. x}\sqrt{-1})^2 + \text{etc.}$$

Streicht man nun die Einheit in beyden Hälften weg, und dividirt die ganze Gleichung durch n, ſo ſieht ſie ſo aus:

$$Ax\sqrt{-1} + n(B\sqrt{-1} - \frac{A^2}{2})x^2 + \text{etc.} = P + nQ + \text{etc.}$$

und da sie unabhängig von der Größe n, die unbestimmt bleibt, dieselbe bleiben soll, so müssen die Glieder, welche die verschiedenen Potenzen von n enthalten, sich von selbst vernichten; welches die Gleichung sogleich auf $Ax\sqrt{-1} = P$ bringt, nemlich, indem man die Potenzen von $\sqrt{-1}$ entwickelt,

$$Ax\sqrt{-1} = (\text{tang. } x - \tfrac{1}{3}\text{tang. } x^3 + \tfrac{2}{5}\text{tang. } x^5 \text{ etc.})\sqrt{-1} + \tfrac{1}{2}\text{tang. } x^2 - \tfrac{1}{4}\text{tang. } x^4 + \tfrac{1}{6}\text{tang. } x^6 - \text{etc.} - \tfrac{1}{2}\text{sin. } x^2 - \tfrac{1}{4}\text{sin. } x^4 - \tfrac{1}{6}\text{sin. } x^6 + \text{etc.}$$

Da man nun die Wurzelgröße $\sqrt{-1}$ plus und minus annehmen kann, so ist sichtbar, daß wenn man sie nach einander positiv und negativ annimmt, und die beyden Gleichungen eine von der andern abziehet, man erhält, nachdem man durch $2A\sqrt{-1}$ dividirt hat:

$$x = \frac{\text{tang. } x - \tfrac{1}{3}\text{tang. } x^3 + \tfrac{1}{5}\text{tang. } x^5 - \text{etc.}}{A}$$

27.

Uebrigens wird es leicht einzusehen seyn, daß die §. 25. gefundene Gleichung

$$\cos. x + \sin. x\sqrt{-1} = 1 + Ax\sqrt{-1} + \tfrac{1}{2}(Ax\sqrt{-1})^2 + \frac{1}{2.3}(Ax\sqrt{-1})^3 + \text{etc.}$$

geradesweges in folgende verwandelt wird;

$$\cos. x + \sin. x\sqrt{-1} = a^{x\sqrt{-1}}$$

nemlich durch die Formel im §. 22., wenn man für a eine abhängige Größe A nimmt, wie wir es ebendaselbst bestimmt haben, nemlich, daß a die Basis des Logarithmischen Systems sey, wovon A der Modul ist.

Diese

Dieſe Formel giebt ſogleich, indem man die Wurzelgröße erſtlich poſitiv und hernach negativ nimmt,

$$\sin.x = \frac{a^{x\sqrt{-1}} - a^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\cos.x = \frac{a^{x\sqrt{-1}} + a^{-x\sqrt{-1}}}{2}.$$

Geht man von den Exponentialgrößen zu den Logarithmen über,

$x\sqrt{-1} = l.(\cos.x + \sin.x\sqrt{-1}) = l\cos.x + l(1 + \tang.x\sqrt{-1})$

oder auch, wenn man nach einander die Wurzelgröße poſitiv und negativ nimmt, und eine Gleichung von der andern abzieht,

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l.\frac{1 + \tang.x\sqrt{-1}}{1 - \tang.x\sqrt{-1}};$$

woraus man die oben gefundenen Reihen herleiten kann, wenn man ſich der Entwickelungen der Exponentialgrößen und Logarithmen wie ſie §. 22, und 23, gezeigt ſind, bedienet.

Es findet hier aber eine wichtige Bemerkung ſtatt; die nemlich, daß in den ſo eben gefundenen Formeln, da die Größe A ſowohl als a willkührlich ſind, das Logarithmiſche Syſtem nach Belieben gewählt werden kann; ſtatt, daß in den gewöhnlichen Formeln, die ſich auf die Kreisbogen beziehen, der Modul A der Einheit gleich iſt, welches für die Baſis die Zahl e giebt, deren hyperboliſche Logarithmen die Einheit iſt. Dieſe ſind alſo nur ein beſonderer Fall derjenigen, die wir gefunden haben; dieſe Particulariſation war aber nothwendig, damit ſie ſich auf den Kreis anwenden ließen, wie wir ſogleich zeigen werden.

28.

Es geht alles darauf hinaus, zu beweiſen, daß in der Formel von $\sin. x$, durch eine Reihe der erſte Satz bloß

x seyn soll, obschon wir vorausgesetzt haben, daß er im Allgemeinen Ax wäre (no. 25). Wenn man die Lehre vom unendlich Kleinen zu Hülfe nimmt, so ist dies leicht einzusehen; denn man sieht, daß sich beym Kreise der Sinus dem ihm zugehörigen Bogen immer mehr nähert, je kleiner er wird, so daß die Unterschiede am Ende unendlich klein werden. Denkt man sich also den Bogen x unendlich klein, so hat man sin. x = x; und folglich A = 1.

Da wir uns aber vorgenommen haben, die Analysis von der Rechnung des Unendlichen ganz unabhängig zu machen, so wollen wir auch den Beweis des gegenwärtigen Satzes ohne ihre Beyhülfe zu führen suchen.

Zu diesem Endzweck wollen wir nur den Grundsatz des Archimedes voraussetzen, daß der Sinus, welcher die Hälfte der Sehne des doppelten Bogens ist, kleiner ist als der Bogen, dem er zugehört, und daß die Tangente größer als derselbe Bogen ist. Auf diese Art erhalten wir

$\sin. x < x$ und $\text{Tang. } x > x$; da nun

$$\text{tg. } x = \frac{\sin. x}{\cos. x} = \frac{\sin x}{\sqrt{(1 - \sin. x^2)}} \text{ ist,}$$

so hat man

$$\frac{\sin. x}{\sqrt{(1 - \sin. x^2)}} > x,$$

und hieraus $\sin. x^2 > x^2 (1 - \sin. x^2)$ wodurch gefunden wird

$$x > \frac{x}{\sqrt{(1 + x^2)}}$$

Gebrauchen wir daher die Formel für sin. x in der No. 25. gefundenen Reihe, so muß man, so klein auch immer der Bogen x ist, doch folgendes erhalten,

$$Ax - \frac{A^3x^3}{2.3} + \frac{A^5x^5}{2.3.4.5} - \text{etc.} < x, > \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

Alſo auch, wenn man durch x dividirt:

$$A - \frac{A^3x^2}{2.3} + \frac{A^5x^4}{2.3.4.5} - \text{etc.} < 1, > \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

Da $\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} = \frac{\sqrt{(1+x^2)}}{1+x^2}$ und $\sqrt{(1+x^2)} > 1$,

ſo erhellet, daß

$$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} > \frac{1}{1+x^2}$$

und man ſieht zugleich, daß

$$\frac{1}{1+x^2} > 1 - x^2$$

denn die Differenz iſt

$$\frac{x^4}{1+x^2}$$

Es wird alſo die Größe, welche

$$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

übertrifft, um ſo mehr $1 - x^2$ übertreffen, ſo daß man die obige Art von Gleichung der Ungleichheit wie unten folgende Geſtalt bringen können

$$A - \frac{A^3x^2}{2.3} + \frac{A^5x^4}{2.3.4.5} - \text{etc.} < 1, > 1 - x^2.$$

Nimmt man nun x ſo groß, daß

$$\frac{A^2x^2}{2.3} < 1,$$

ſo iſt augenſcheinlich, daß die Reihe

$$A - \frac{A^3x^2}{2.3} + \text{etc.}$$

convergirend ſeyn wird und $< A$ aber

$$> A - \frac{A^3x^2}{2.3},$$

weil, wenn man das zweyte und dritte Glied addiret, und eben so das 4te und 5te u. s. w.; man immer nur negative Größen erhält; addirt man hingegen das 3te und 4te, 5te und 6te Glied, und so fort, so erhält man lauter positive Größen. Ist nun

$$x = \frac{\sqrt{6}}{A},$$

so ist um so mehr

$$A - \frac{A^3x^2}{2.3} < 1 \text{ und } A > 1 - x^2$$

folglich $A > 1 - x^2$ und $< 1 + \frac{A^3x^2}{2.3}$.

Da dies nun statt finden muß, so klein auch x angenommen wird, so folgt hieraus ganz natürlich $A = 1$. Wenn wirklich $A = 1 + i$, wo i eine jede auch noch so kleine positive Größe seyn kann, so brauchte man nur x, so daß

$$\frac{A^3x^2}{2.3} < i$$

zu nehmen und die Bedingung, daß

$$A < 1 + \frac{A^3x^2}{2.3},$$

würde nicht mehr statt finden. Eben so, wenn $A = 1 - i$, darf man nur $x^2 < 1$ nehmen, und die andere Bedingung $A > 1 - x^2$ würde falsch seyn. Es ist daher im Kreise ohnfehlbar $A = 1$; und mithin $la = e = $ der Zahl deren hyperbolischer Logarithmus die Einheit ist; welches unsre Formeln wieder auf die bekannten Kreisfunktionen zurückführt.

19.

29.

Es ſey viertens, $fx = \sin. x$, ſo hat man

$f(x + i) = \sin.(x + i) = \sin.x.\cos.i + \cos.x.\sin.i$

Wir fanden aber ſo eben

$$\sin. i = i - \frac{i^3}{2.3} + \text{etc.} \quad \cos. i = 1 - \frac{i^2}{2} + \text{etc.}$$

wenn man nemlich in die Formeln (no. 25) $x = i$, und $A = 1$ ſetzt. Daher ſind die beyden erſten Sätze in der Entwickelung von $\sin.(x + i)$, dieſe: $\sin. x + i.\cos. x$; und man erhält alſo $f'x = \cos. x$.

Eben ſo findet man, wenn $fx = \cos. x$; daß

$f(x+i) = \cos.(x+i) = \cos. x.\cos. i - \sin. x.\sin. i =$
$\cos. x - i \sin. x +$ etc.

alſo $f'x = -\sin. x$.

Hat man auf die Art die erſten Funktionen der Hauptfunktionen $\sin. x$ und $\cos. x$ gefunden, ſo wird man leicht die abgeleiteten Funktionen hieraus herleiten können.

Denn da wirklich $fx = \sin. x$ zur Folge hatte, daß $f'x = \cos. x$. und eben ſo $fx = \cos. x$, $f'x = -\sin. x$ gab, ſo iſt klar, daß man für $fx = \sin. x$ bekömmt $f'x = \cos. x$; $f''x = -\sin. x$, $f'''x = -\cos. x$; $f^{v}x = \sin. x$, etc.; und daß für $fx = \cos. x$ man erhält

$f'x = -\sin. x$; $f''x = -\cos. x$, $f'''x = \sin. x$ $f^{v}x = \cos. x$ etc.

Nach dieſen Formeln würde man ſogleich folgende Reihen erhalten:

$$\sin.(x+i) = \sin. x + i.\cos. x - \frac{i^2}{2}\sin. x - \frac{i^3}{2.3}\cos. x + \frac{i^4}{2.3.4}\sin. x + \text{etc.}$$

cos.

$$\cos.(x+i) = \cos. x - i \sin. x. - \frac{i^2}{2} \cos. x + \frac{i^3}{2.3} \sin. x + \frac{i^4}{2.3.4} \cos. x - \text{etc.}$$

welches, wenn man $x = 0$ ſetzt, und hernach i in x verwandelt, dieſelben Formeln giebt, die wir ſchon weiter oben fanden.

30.

Die Funktionen x^m, a^x, lx, sin. x und cos. x, welche wir ſo eben betrachtet haben, können als die einfachen analytiſchen Funktionen einer einzigen veränderlichen Größe angeſehen werden. Alle andre Funktionen von x entſtehen aus jenen durch Addition, Subtraction, Multiplication oder Diviſion, oder ſind überhaupt durch Gleichungen, in welchen Funktionen von derſelben Form ſich befinden, gegeben.

Da wir alſo die erſten Funktionen der einfachen Funktionen, welche wir eben unterſuchten, kennen, ſo wird man leicht die erſten Funktionen der zuſammengeſetzten Funktionen finden; und durch wiederhohlte Operationen wird man nach einander die zweyten, dritten etc. Funktionen erhalten.

Es ſeyen p, q, r, etc. einfache Funktionen von x, von welchen p', q', r', etc. die durch die vorhergehenden Regeln bekannte erſten Funktionen ſeyn mögen; und man verlangt die erſte Funktion y', von einer aus p, q, r zuſammengeſetzten Funktion y, ſo erwäge man, daß wenn x wird $x + i$, y überhaupt

$$y + y'i + \frac{y''i^2}{2} + \text{etc.}$$

wird (no. 17.). p, q, r, etc. werden zu gleicher Zeit

$$p + p'i + \text{etc.},\quad q + q'i + \text{etc.},\quad r + r'i + \text{etc.}$$

und eben ſo die andern. Man braucht alſo nur dieſe Werthe in den Ausdruck von y zu ſetzen, die Glieder nach der Potenz von i zu entwickeln und der Coeffizient von i wird der geſuchte Werth von y′ ſeyn.

Wenn alſo y = ap + bq + etc. und a, b, etc. beſtändige Coeffizienten ſind, ſo hat man fogleich

$$y' = ap' + bq' + \text{etc.} \quad 1,$$

Wenn y = apq, ſo wird die Größe pq gleich

$$(p + ip' + \text{etc.})\,(q + iq' + \text{etc.}) = pq + i(p'q + q'p) + \text{etc.};$$

folglich

$$y' = ap'q + aq'p. \quad 2,$$

Wenn y = apqr, ſo wird man auf eben die Art finden

$$y' = ap'qr + aq'pr + ar'pq;$$

und ſo weiter.

Wenn $y = \frac{ap}{q}$,

ſo wird die Größe

$$\frac{p}{q} \text{ gleich } \frac{p + ip' + \text{etc.}}{q + iq' + \text{etc.}}$$

Wenn man den Nenner durch die bekannte Regeln in einer Reihe entwickelt, ſo hat man

$$(p + ip' + \text{etc.})\left(\frac{1}{q} - \frac{iq'}{q^2} + \text{etc.}\right)$$

$$= \frac{p}{q} + i\left(\frac{p'}{q} - \frac{q'p}{q^2}\right) + \text{etc alſo } y' = \frac{ap'}{q} - \frac{apq'}{q^2} \quad 3,$$

31.

Es ſey überhaupt y = fp, u. ſieht man fp als eine urſprüngliche Funktion von p an, ſo wird ihre erſte Funktion f′p ſeyn; wenn alſo p, p + o wird, (ich gebrauche hier die unbeſtimmte Größe o, ſtatt der unbeſtimmten Größe i, welche immer die unbeſtimmte Vermehrung von

x bezeichnen ſoll), ſo wird

fp gleich $fp + of'p + \frac{o^2}{2} f''p$ + etc. werden (no. 17.)

Alſo, da p eine Funktion von x iſt, wenn x, $x+i$ wird, ſo wird

$$p \text{ (ibid) } p + ip' + \frac{i^2 p''}{2} + \text{etc.};$$

mithin, wenn man

$$o = ip' + \frac{i^2 p''}{2} + \text{etc.},$$

macht, ſo wird fp durch die Subſtitution von $x + i$, ſtatt x,

$$fp + ip' f'p + \frac{i^2}{2} (p' f''p + p' p' f'p) + \text{etc.}$$

Folglich wird man $y' = p' f'p$ haben. Daraus fließt folgender Grundſatz: die erſte Funktion einer Funktion von einer Größe, welche ſelbſt eine Funktion von x iſt, iſt gleich dem Produkte der erſten Funktionen von den beyden Funktionen

Wenn wir jetzt vorausſetzen, daß y eine Funktion von p und q ſey, welche wir durch $f(p, q)$, bezeichnen wollen, ſo müſſen wir alſo $x + i$ ſtatt x in den zwey Funktionen p und q Subſtituiren. Es iſt aber ſichtbar, daß man daſſelbe Reſultat erhalten muß, man mag dieſe zwey Subſtitutionen auf einmal oder nach einander machen, weil die Größen p und q als unabhängig angeſehen werden. Setzt man erſtlich $x + i$ ſtatt x in der Funktion p, und betrachtet man die Funktion $f(p, q)$ nur als eine Funktion von p, ſo wird daraus

$$f(p, q) + ip' f'(p) + \text{etc.}$$

Ich ſchreibe bloß $f'(p)$, um die erſte Funktion von $f(p,q)$ zu bezeichnen, die nur in Beziehung von p allein genommen, und q als beſtändig betrachtet wird.

Wir wollen jetzt x + i ſtatt x in q ſetzen, ſo wird die Funktion $f(p, q)$ gleichfalls

$$f(p, q) + iq'f'(q) + \text{etc.}$$

werden, wo $f'(q)$ die erſte Funktion von $f(p, q)$ vorſtellt, in Beziehung von q allein genommen, und p als beſtändig betrachtet wird. Das Glied $ip'f'(p)$ betreffend, ſo iſt es ſichtbar, daß es ſich durch dieſe neue Subſtitution, mit Gliedern vermehrt finden würde, die mit i^2, i^3, etc. multiplizirt ſind. Alſo die beyden erſten Glieder der Reihe, welche durch die Entwickelung von $f(p, q)$ nach der Subſtitution von $x_1 + i$ ſtatt x entſtehen, werden bloß

$$f(p, q) + i\,[p'f'(p) + q'f'(q)]$$

ſeyn; folglich hat man

$$y' = p'f'(p) + q'f'(q).$$

Wenn y eine Funktion von p, q, r wäre, die durch $f(p, q, r)$ vorgeſtellt iſt, ſo fände man auf eben die Art

$$y' = p'f'(p) + q'f'(q) + r'f'(r),$$

und ſo weiter.

Hieraus iſt ſehr leicht dieſe allgemeine Schlußfolge zu ziehen, daß die erſte Funktion einer aus verſchiedenen einzelnen Funktionen zuſammengeſetzten die Summe der erſten Funktionen, in Beziehung auf einer jeden dieſer Funktionen, einzeln und unabhängig einer von der andern, betrachtet ſeyn wird.

Dieſer Grundſatz mit dem vorigen verbunden reichet hin, um die erſten Funktionen aller Arten von Funktionen zu finden, ſo wie auch die andre Funktionen, welche von höhern Ordnungen abgeleitet ſind.

32.

Alſo vorausgeſetzt, es ſey X irgend eine Funktion von x, die erſten Funktionen von X^m, lX, a^X, sin. X, cos. X. etc.

werden ſeyn

$$mX^{m-1}X',\ \frac{X'}{X},\ a^X la\, X',\ X'\cos.X,\ -X'\sin.X,\ \text{etc.}$$

und ihre zweyte Funktionen werden ſeyn

$$mX^{m-1}X'' + m(m-1)X^{m-2}X'^2,$$

$$\frac{X''}{X} - \frac{X'^2}{X^2},\ a^X la\, X'' + a^X (la)^2 X'^2,$$

$$X''\cos.X - X'^2\sin.X - X''\sin.X - X'^2\cos.X,\ \text{etc.};$$

und ſo weiter.

33.

Aber die Funktion y könnte nicht anders gegeben ſeyn als durch irgend eine Gleichung zwiſchen x und y.

Wir wollen dieſe Gleichung überhaupt durch $F(x,y)=0$ vorſtellen, ſo wird man durch die Auflöſung haben y gleich irgend einer Funktion von x, welche man durch fx bezeichnen könnte; wenn man alſo fx ſtatt y in der Funktion $F(x,y)$ ſetzt, ſo wird ſie $F(x,fx)$, d. h. eine Funktion von x allein, welche wir durch φx bezeichnen werden.

Dieſe Funktion φx ſoll alſo Null ſeyn, was auch immer der Werth von x ſeyn mag. Sie wird es alſo auch ſeyn, wenn man $x+i$ ſtatt x ſetzet, was auch immer der Werth von i ſey. Aber durch dieſe Subſtitution wird φx zu

$$\varphi x + i\varphi' x + \frac{i^2}{2}\varphi'' x + \text{etc.};$$

alſo, um damit i eine beliebige Größe ſeyn kann, ſo muß man einzeln die Gleichungen

$$\varphi x = 0,\ \varphi' x = 0,\ \varphi'' x = 0,\ \text{etc.}$$

haben, von welchen die erſte die gegebene Gleichung, die zweyte ihre erſte, die dritte ihre zweyte Funktion iſt.

Da nun

$$\varphi x = F(x,fx,) = F(x,y),$$

$\varphi' x$ wird die erſte Funktion von $F(x,y)$ ſeyn, (y als eine Funktion von x angeſehen) und durch den in no. 31 feſtgeſtellten Grundſatz wird dieſe erſte Funktion ausgedrückt durch

$$F'(x) + y' F'(y),$$

indem man durch $F'(x)$ und $F'(y)$ die erſten Funktionen von der Funktion $F(x, y)$, nur in Beziehung auf x und auf y allein genommen, bezeichnet. Alſo die Gleichung $\varphi' x = 0$ giebt

$$F'(x) + y' F'(y) = 0;$$

woraus man erhält

$$y' = -\frac{F'(x)}{F'(y)}.$$

Hat man alſo den erſten Werth der erſten Funktion y' in der Funktion von x und y, ſo wird man die von y'' haben, wenn man die erſte Funktion dieſer Funktion nimmt, u. ſ. w. Aus der vorigen Analyſis entſtehet folgender Grundſatz.

Wenn man irgend eine Gleichung zwiſchen zwey veränderlichen Größen x, y, hat, ſo wird die Gleichung auch noch beſtehen zwiſchen den erſten Funktionen aller dieſer Glieder, ſo wie auch zwiſchen ihren zweyten Funktionen &c. Wir werden dieſe neue Gleichungen abgeleitete Gleichungen nennen; und insbeſondere erſte Gleichungen zweyte Gleichungen, &c. und die, ſo man erhält, wenn man die erſten, zweyten Funktionen &c. nimmt.

Wenn die Gleichung nur eine veränderliche Größe x enthielte, welche unbeſtimmt bleiben ſollte, welches in identiſchen Gleichungen ſtatt findet, ſo würde derſelbe Grundſatz ſtatt finden, und man hätte ebenfalls eine erſte, zweyte Gleichung &c. die ebenfalls identiſch wären.

34.

Welche auch die vorgegebene Funktion fx seyn m
und auf welche Art sie auch gegeben sey, so hat
einfache und allgemeine Methoden, ihre erste Funktion
zu finden; und daraus könnte man durch Wiederho
der nemlichen Operationen alle andre abgeleitete Funkti
finden. Man wird auf die Art leicht alle Glieder
Reihe

$$fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \&c.$$

haben, welche durch die Entwickelung der Fun
$f(x + i)$ entstehet, wenn die Entwickelung dieser F
fähig ist.

Es ist also nöthig, ehe wir weiter gehen, zu u
suchen, wenn und in wie fern diese Form fehlerhaft
könnte.

Wir haben schon oben (no. 10.) gezeigt, daß es
geschehen kann, wenn man x einen bestimmten W
giebt, so daß sie in der Funktion fx und deren abg
teten einige Wurzelgrößen verschwinden läßt. Aber
Wurzelgröße kann in einer Funktion nur auf zwey
Art verschwinden, entweder weil die Zahl, welche
Wurzelgröße multiplizirt, zu Null wird, oder weil
Wurzelgröße selbst Null wird.

Im ersteren Fall ist es klar, daß die Wurzelgröße, t
che in fx verschwindet, vielleicht nicht in $f'x$, $f''x$, &c.
schwinden kann, oder auch, wenn sie zu gleicher Zeit in fx,
verschwindet, so dürfte solche vielleicht nicht in $f''x$, $f'''x$
verschwinden, u. s. w. weil, wenn die Wurzelgröße
schiedne Coefficienten in den abgeleiteten Funktionen erla

werden dieſe Coeffizienten nicht mehr durch dieſelbe Voraussetzung für die veränderliche Größe zu Null.

Im zweyten Fall iſt es im Gegentheile deutlich, daß die Wurzelgröße in allen Funktionen fx, $f'x$, $f''x$, &c. als unendliche nothwendig verſchwindet, weil es die Wurzelgröße ſelbſt iſt, welche für einen gegebenen Werth der veränderlichen Größe x als verſchwindend vorausgeſetzt iſt. Da nun das Verſchwinden der Wurzelgröße nicht mehr ſtatt haben kann in der Funktion $f(x+i)$, wo i eine unbeſtimmte und unabhängige Größe von x iſt, ſo folget, daß die Reihe

$$fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \&c.$$

welche die Entwickelung dieſer Funktion vorſtellet, nicht genau ſeyn kann, ſo lange ſich dieſelbe Wurzelgröße darinn findet; folglich wird dieſe Reihe im erſtern Fall legitimirt ſeyn, im andern Fall aber nicht.

35. Lehrſatz.

Es ſey $y = fx$, folglich, wenn man die erſten, zweyten Funktionen &c. nimmt

$$y' = f'x,\ y'' = f''x \text{ &c.},$$

und annimmt, daß für einen gegebenen Werth von x, in fx eine Wurzelgröße verſchwindet, welche nicht in $f'x$ verſchwindet; ſo iſt klar, daß für dieſen Werth von x die Funktion $f'x$ eine weit größere Zahl von unterſchiedenen Werthen als die Funktion fx haben ſollte, nemlich wegen der Wurzelgröße, welche in $f'x$ und nicht in fx verſchwunden iſt, woraus folget, daß der Werth von y' nicht durch eine Funktion von x und y, welche dieſe Wurzelgröße nicht enthielte, könnte gegeben werden. Demungeachtet, wenn man in der Gleichung $y = fx$

dieſelbe Wurzelgröße durch Erhebung der Potenzen nichtet, und die entſtandene Gleichung durch $F(x,y)$ vorgeſtellt, ſo wird ihre erſte Gleichung wie man (n geſehen hat, allgemein geben,

$$y' = -\frac{F'x)}{F'(y)}.$$

Alſo wird dieſer Ausdruck fehlerhaft ſeyn in dem wo man x den beſagten Werth giebt, welches nicht haben kann, ſo lange die Größen $F'(x)$ und $F'(y)$ oder die andre zu gleicher Zeit Null ſeyn werden. in dem jetzigen Fall wird der Ausdruck y' gleich Nu vidirt mit Null; und umgekehrt, wenn dieſes geſch ſo wird es ein Zeichen ſeyn, daß der coreſpondi Werth von x in fx eine Wurzelgröße vernichtet hat, ne ſolche in $f'x$ zu vernichten.

Um in dieſem Fall den Werth von y' zu haben, i nicht hinreichend, ſich bey der erſten Gleichung von F $= o$ aufzuhalten, welche $y'F'(y) + F'(x) = o$ iſt 33) und die unabhängig von dem Werthe von y' ſich ſelbſt ſtatt haben wird, aber man muß zu der z ten Gleichung übergehen, welche man durch dieſelben geln von folgender Form finden wird:

$y''F'(y) + y'^2F''(y) + 2y'F''(y)(x) + F''(x) =$

indem man durch $F'(y)$ und $F'(x)$ die erſten Funkti von $F(y)$ und $F(x)$ bezeichnet, die erſte in Bezie auf x allein, das heißt, die Funktionen von $F(y, x)$ Beziehung derſelben iſolirten veränderlichen Größen nommen und durch $F''(y)(x)$ die erſte Funktion von F in Beziehung auf x genommen, oder die erſte Funk von $F'(x)$ in Beziehung auf y genommen, da dieſe Fu tionen daſſelbe bedeuten, wie man ſich leicht davon ü führen kann, und wie wir es weiter unten beweiſen werd

w

enn wir von den Funktionen mehrerer veränderlichen
rößen handeln werden, das heißt, die zweyte Funktion
on $F(y, x)$ in Beziehung auf y und auf x genommen.

Dieſe Gleichung giebt allgemein den Werth von y'';
ber in dem vorgeſetzten Fall, wenn die Größe $F'(y)$ Null
ird, ſo wird das Glied, welches y'' enthält, verſchwin-
en und die bleibende Gleichung wird eine Gleichung des
weyten Grades von y', durch welche man den Werth von
$'$ beſtimmen wird, welcher alſo doppelt ſeyn wird.

36.

Es ſey z. B. $fx = (x - a)\sqrt{(x - b)}$, ſo daß
an die Gleichung hätte $y = (x - a)\sqrt{(x - b)}$, ſo
ird man haben:

$$f'x = y' = \sqrt{(x - b)} + \frac{x - a}{2\sqrt{(x - b)}};$$

ucht man $x = a$, ſo hat man

$$y = o,\ y' = \sqrt{(x - b)} = \sqrt{(a - b)},$$

raus man ſiehet, daß die Wurzelgröße in dem Werth
n y verſchwindet, aber nicht in dem von y', ſo daß der
erth von y einfach, und der von y' doppelt iſt.

Wenn man jetzt die vorgegebene Gleichung zu folgen-
r rationalen Form

$$y^2 = (x - a)^2 (x - b),$$

rückbringt, und wenn man die erſte Gleichung davon
mmt, ſo hat man:

$$2yy' = 2(x - a)(x - b) + (x - a)^2$$

raus man erhält

$$y' = \frac{2(x - a)(x - b) + (x - a)^2}{2y}.$$

ucht man $x = a$, ſo hat man $y' = \frac{0}{0}$; geht man alſo
der zweyten Gleichung über, ſo wird man haben:

$$2y'^2 + 2yy'' = 4(x - a) + 2(x - b).$$

Hier giebt $x = a$ (wegen $y = o$ in diesen Fall)

$$2y'^2 = 2(x - b) = 2(a - b);$$

also $y' = \sqrt{(a - b)}$, wie oben. Es kann übrigens möglich seyn, daß derselbe Werth von x, welcher die Glieder der ersten Gleichung vernichtet, auch die in der zweyten Gleichung vernichtet; dann müßte man zur dritten Gleichung übergehen, welche durch die Vernichtung der Glieder, welche y'' und y''' enthalten würden, eine einfache Gleichung von y' werden würde, aber vom dritten Grade u. s. w. Das hängt von der Natur der Wurzelgröße ab, welche in fx vernichtet worden ist, und welche durch den Grad der Gleichung, von welcher der Werth von y' abhängt, ersetzt werden soll; aber wir werden uns hierüber nicht weiter einlassen, um uns nicht zu sehr von unserm Gegenstand zu entfernen.

37.

Vorausgesetzt, daß im andern Fall derselbe Werth von x, welcher eine Wurzelgröße in fx verschwinden läßt, es auch in $f'x$ verschwinden ließe, ohne es demungeachtet in $f''x$ verschwinden zu lassen, dann werden die correspondirenden Werthe von fx und von $f'x$ ingleicher Zahl seyn, aber die von $f''x$ werden in größerer Zahl seyn. Wenn man also diese Wurzelgröße in der Gleichung $y = fx$ vernichtet, so wird der Werth von y'', welchen man davon ableitet $= \frac{0}{0}$ gefunden, und man müßte zu den abgeleiteten Gleichungen von höheren Ordnungen übergehen, um den Werth von y'' zu haben.

Es sey $y = (x - a)^2\sqrt{(x - b)}$, so wird man haben

$$y' = 2(x - a)\sqrt{(a - b)} + \frac{(x - a)^2}{2\sqrt{(x - b)}},$$

$y'' =$

$$y'' = 2\sqrt{(x-b)} + \frac{2(x-a)}{\sqrt{(x-b)}} - \frac{(x-a)^2}{4(x-b)^{\frac{3}{2}}};$$

macht man $x = a$, ſo hat man

$y = 0$, $y' = 0$, und $y'' = 2\sqrt{(x-h)} = 2\sqrt{(a-b)}$.

Aber wenn man die vorgegebene Gleichung zu folgender rationalen Form bringt: $y^2 = (x-a)^4 (x-b)$, ſo wird man daraus die erſte Gleichung

$$2yy' = 4(x-a)^3 (x-b) + (x-a)^4,$$

erhalten, welche, wenn

$$x = a,\ y' = \tfrac{0}{0} \text{ giebt, wegen } y = 0,$$

es ſey denn, indem man den Werth von y ſubſtituirt, man das Ganze nicht durch $(x-a)^2$ dividirt, und daß man hernach nicht $x = a$ macht, welches $y' = 0$ geben würde.

Gehen wir zur zweyten Gleichung über, ſo wird man haben

$$y'^2 + yy'' = 6(x-a)^2 (x-b) + 4(x-a)^3;$$

wenn man $x = a$ macht, ſo hat man $y' = 0$ wie oben.

Aber um den Werth von y'' zu haben, muß man zur dritten und ſelbſt zur vierten Gleichung ſeine Zuflucht nehmen. Jene wird ſeyn

$$3y'y'' + yy''' = 12(x-a)^2 + 12(x-a)(x-b),$$

wo alle Glieder verſchwinden, wenn $x = a$. Die folgende giebt:

$$3y''^2 + 4y'y''' + yy'^{v} = 48(x-a) + 12(x-b)$$

Macht man $x = a$ und folglich $y = 0$ und $y' = 0$, ſo hat man

$$3y''^2 = 12(x-b),\ y'' = 2\sqrt{(x-b)} = 2\sqrt{(a-b)}$$

wie weiter oben.

38.

Wir werden diese Analyse nicht weiter treiben, welche übrigens nach den festgesetzten Grundsätzen weiter keine Schwierigkeit mehr hat. Wir wollen uns begnügen zu bemerken, daß wenn man die Curve construirt, von welcher x die Abciſſe und $y = fx$ die Ordinate wäre, diese Curve ein sogenannter vielfacher Punkt haben würde, in dem Orte, welcher dem gegebenen Werthe von x correspondirt, und welcher eine Wurzelgröße in fx wird verschwinden lassen, ohne daß solche zu gleicher Zeit in $f'x$ verschwindet; daß sie einen Berührungspunkt haben wird, wenn derselbe Werth von x, zu gleicher Zeit in fx und $f'x$ eine Wurzelgröße verschwinden ließe; daß es ein osculirender Punkt wäre, wenn die Wurzelgröße zu gleicher Zeit in $f''x$ verschwände, u. s. w. Man wird den Grund davon einsehen, wenn wir die Theorie der Funktionen auf die Theorie der Curven anwenden werden.

39.

Bey Gelegenheit der Schwierigkeit, welche wir eben aufgelößt haben, wollen wir die Theorie von der Methode lehren, um den Werth eines Bruchs, in dem Fall, wo Zähler und Nenner zu gleicher Zeit Null werden, zu finden.

Es sey $\frac{fx}{Fx}$ ein solcher Bruch, wo fx und Fx Funktionen von x sind, und wo die Voraussetzung von $x = a$ sie beyde zu gleicher Zeit zu Null macht. Man verlangt den Werth dieses Bruchs, wenn $x = a$.

Man mache $y = \frac{fx}{Fx}$, und folglich

$$yFx = fx.$$

nn man $x = a$ annimmt, ſo rechtfertiget ſich dieſe Glei-
ng von ſelbſt, unabhängig von dem Werth von x, wel-
r alſo unbeſtimmt bleibt; daher kann ſie nicht in dieſem
ande der Beſtimmtheit, wenn $x = a$ iſt, zu Beſtim-
ng von y dienen. Nimmt man aber die erſte Gleichung,

ſo hat man $y'Fx + yF'x = f'x$;

Vorausſetzung von $x = a$ läßt das Glied $y'Fx$ ver-
vinden; und das übrige der Gleichung giebt $y = \frac{f'x}{F'x}$.

nn es geſchiehet, daß die erſten Funktionen $f'y$, $F'x$ durch
ſelbe Annahme zu Null würden, ſo würde man durch eben
n Grundſatz, wenn man in der oben genanten Gleichung
, $F'x$, ſtatt fx, Fx, ſetzte, dieſen neuen Ausdruck von y,

$$y = \frac{F''x}{f''x}, \text{ u. ſ. w.}$$

den. Man könnte ſie auch directe von der erſten Glei-
ng herleiten, wenn man betrachtet, daß, da ſie von
uem ſich ſelbſt rechtfertiget, ſie nicht mehr zu der Beſtim-
ng von y dienen kann; daß es folglich nöthig iſt, zu der
epten Gleichung überzugehn, welche ſeyn wird

$$3F''x + 2y'F'x + yF''x = f''x.$$

n die Vorausſetzung von $x = o$ die Funktionen Fx und
'x zu Null machet, ſo werden die Glieder y' und y'' von
bſt wegfallen und die übrigen Glieder werden geben

$$y = \frac{f''x}{F''x},$$

e weiter oben. Es iſt nicht zu fürchten, daß die Funk-
nen fx, $f'x$, $f''x$, &c. und Fx, $F'x$, $F''x$ &c. ins unend-
e, könnten zu gleicher Zeit durch die Annahme $x = a$
ll werden, wie es einige Geometer anzunehmen ſchei-
. Denn weil

$$f(x + i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x \text{ &c.}$$

ſo hat man, wenn $x = a$

$$f(a + i) = o$$

was auch i ſeyn mag, welches unmöglich iſt. Es würde eben ſo von

$$F(x + i) \text{ ſeyn.}$$

Aber es kann ſich zutragen, daß dieſe Funktionen durch die nemliche Annahme von $x = a$ unendlich würden, welches ebenfalls die Brüche

$$\frac{fx}{Fx}, \quad \frac{f'x}{F'x}, \text{ &c.}$$

unbeſtimmt machen würde: aber die Auflöſung dieſer Schwierigkeit hängt von der Unterſuchung des zweyten Falls von Nr. 34. ab, mit welchem wir uns jetzt beſchäftigen wollen.

40.

Dieſer Fall hat ſtatt, wenn die Annahme von $x = a$ eine Wurzelgröße in fx verſchwinden läßt, indem man ſie zu Null macht, in welchem Falle, ſie ſolche ebenfalls in den abgeleiteten Funktionen verſchwinden läßt. Bleibt aber dieſe Wurzelgröße in der Funktion $f(x + i)$, ſo muß ſolche auch in der Entwickelung dieſer Funktion bleiben; folglich da ſolche nicht mit dem Werthe von x verbunden ſeyn kann, ſo muß ſolche mit i verbunden ſeyn; woraus folget, daß dieſe Entwickelung nothwendig irrationale Potenzen von i enthalten muß. Es iſt in der That klar, daß wenn fx die Größe $\sqrt[m]{X}$ enthält, (da X eine Funktion von x iſt, welche Null wird, wenn $x = a$, indem man $x + i$ an der Stelle von x ſetzet), ſo wird X;

$X + i$

$$X + iX' + \frac{i^2}{2} X'' + \&c.$$

und macht man $x = a$, ſo hat man bloß

$$iX' + \frac{i^2}{2} X'' + \&c.$$

ſtatt den Werth von X; ſo daß $\sqrt[m]{X}$ werden wird

$$\sqrt[m]{(iX' + \frac{i^2}{2} X'' + \&c.)}.$$

Die Funktion $f(x + i)$ wird alſo in dem Fall von $x = a$, die Wurzelgröße $\sqrt[m]{i}$ enthalten, welche ſich folglich in ihrer Entwickelung, nach den Potenzen von i finden ſollte. Wir wollen daher ſehen, was die fehlerhafte Entwickelung

$$fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \&c.$$

geben wird.

41.

Dieſerhalb bemerke ich, daß die Funktionen

$$f'(x + i),\ f''(x + i),\ \&c.$$

(ebenfalls) die erſten, zweyten &c. Funktionen von der Funktion $f(x + i)$ ſind, man mag ſie in Hinſicht auf x (oder in Hinſicht auf x) oder in Hinſicht auf i nehmen, welches augenſcheinlich iſt, weil, wenn man x oder i um eine unbeſtimmte Größe vermehret, man daſſelbe Wachsthum der Größe $x + i$ hat. Woraus folget, daß man ebenfalls die Werthe von $f'x$, $f''x$, &c. (was auch x ſeyn mag), haben wird, wenn man die erſte, zweyte, &c. Funktionen von $f(x + i)$ in Hinſicht auf i nimmt und nachher $i = 0$ machet.

Wenn man nemlich annimmt, daß, wenn x = a iſt, die Entwickelung von $f(x + i)$ ein mit i^m behaftetes Glied als Ai^m enthalten ſoll, und A eine Funktion von a, und m keine ganze poſitive Zahl iſt, ſo müßen, indem man die erſten zweyten &c. Funktionen in Hinſicht auf i nimmt, die Entwickelungen von

$$f'(x + i),\ f''(x + i),\ \&c.$$

die Glieder

$$mAi^{m-1},\ m(m-1)Ai^{m-2},\ \&c.\ \text{(no. 18)}$$

enthalten. Macht man alſo $i = 0$, ſo ſchließt man daraus, daß die Funktionen fx, $f'x$, $f''x$ &c., wenn $x = a$ reſpective die Glieder

$$Ao^m,\ mAo^{m-1},\ m(m-1)Ao^{m-2},\ \&c.$$

enthalten.

Wenn m irgend eine negative Zahl iſt, ſo iſt es klar, daß alle dieſe Glieder unendlich ſeyn werden.

Wenn m keine ganze poſitive Zahl iſt, (es ſey n die unmittelbar größere ganze Zahl als m), ſo iſt es ſichtbar, daß das Glied

$$m(m-1)\ldots(m-n+1)Ao^{m-n}$$

unendlich ſeyn wird, ſo wie alle folgende, (und daß alle vorhergehende Null ſeyn werden.)

Alſo überhaupt die Funktion $f''x$ und alle folgende

$$fx^{n+1},\ fx^{n+2},\ \&c.$$

in's unendliche (n, n + 1, &c. ſind nur Anzeiger) werden unendlich ſeyn, wo n die auf den Exponenten m folgende unmittelbar größere poſitive Zahl iſt.

42.

Man wird daraus ſchließen, daß die Entwickelung

$$fx + if'x + \frac{i^2}{2}f''x + \&c.$$

nicht

nicht für einen gegebenen Werth von x falſch werden kann, in ſo fern eine der Funktionen fx, $f'x$, $f''x$, &c. für dieſen Werth von x, ſo wie alle folgende unendlich werden. Denn wenn n der Anzeiger der erſten Funktion, welche unendlich wird, iſt, ſo müßte die Entwickelung, von welcher die Rede iſt, ein Glied von der Form i^m enthalten, wo m eine zwiſchen $n - 1$ und n enthaltene Zahl iſt.

Und wenn für den nemlichen Werth von x alle Funktionen fx, $f'x$, $f''x$, &c. unendlich würden, ſo würde in dieſem Fall die Entwickelung von $f(x - i)$ negative Potenzen von i enthalten.

Um alsdann die wahre Form der Entwickelung nach den ſteigenden Potenzen von i zu finden, müßten wir in der Funktion $f(x - i)$, x dem gegebenen Werthe gleich machen, und nachgehends, durch die bekannten Regeln nach den ſteigenden Potenzen von i entwickeln, mit Rückſicht auf die Bruch- oder negativen Potenzen von i, welche ſich in der Funktion ſelbſt befänden. Uebrigens werden wir bemerken daß wenn man $y = fx$ macht, und x und y für die Ordinaten einer Curve annimmt, ſo hat dieſe Curve in dem Punkte, wo eine der Funktionen y, y', y'', &c. ſo wie alle folgende unendlich wird, eine Wiederkehrung (rebrouſſement), deren Art von dem Anzeiger n abhängen wird, wenn nur der Bruchexponent m zum Nenner eine gerade Zahl hat; und man wird in dieſem Falle die Natur der Wiederkehrung durch die Form der Entwickelung von $f(x + i)$ beſtimmen.

43.

In dem Beyſpiele von no. 36, wo

$$y = (x - a)\sqrt{(x - b)},$$

ſieht man daß die Annahme von $x = b$, die Wurzelgröße in y vernichtet; und ſoll ſie folglich auch in den abgeleiteten

Funk-

Funktionen y', y'', &c. vernichten. Mithin wird die Entwickelung

$$fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \&c.,$$

von $f(x + i)$, wenn man

$$y = fx = (x - a)\sqrt{(x - b)},$$

annimmt, in dem Fall von $x = b$, fehlerhaft ſeyn. Man wird wirklich in dieſem Fall haben

$$y = 0,\ y' = \sqrt{(x - b)} + \frac{x - a}{2\sqrt{(x - b)}} = \infty$$

(wo $x = b$ iſt), und man wird eben ſo

$$y'' = \infty,\ y''' = \infty,\ \&c.$$

finden. Alſo müßte die hier in Rede ſtehende Entwickelung ein Glied von der Form i^m enthalten, wo m zwiſchen 0 und 1 liegt.

Es ſey wirklich $x = b + i$, ſo wird

$$fx,\ \text{zu}\ (b - a + i)\sqrt{i},$$

ſo, daß die wahre Entwickelung dieſer Funktion

$$(b - a)\sqrt{i} + i^{\frac{3}{2}},\ \text{ſeyn wird.}$$

44.

Auf eben die Art wird man auch die am Ende von no. 39. vorgegebene Schwierigkeit über die Brüche, welche beſtändig unbeſtimmt bleiben würden, wenn man ins Unendliche die abgeleitete Funktionen vom Zähler und Nenner nimmt, haben. Wir haben dort geſehen, daß es nur in dem Fall geſchehen kann, wo der nemliche Werth von x dieſe auf einander folgenden Funktionen unendlich machte. Man müßte alſo, (weil a der Werth von x iſt, welcher dieſe Funktionen unendlich macht), in dem allgemeinen Ausdruck des Bruches $x = a + i$ annehmen, nachher dieſen Ausdruck in eine Reihe, nach den ſteigenden Potenzen von i bringen

und

und das erſte Glied dieſer Reihe, wenn man $i = o$ macht, wird den geſuchten Werth des Bruches, für den Fall von $x = a$ geben.

Alſo, wenn man den Bruch

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + (x - a)}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$$

hätte, welcher $\frac{o}{o}$ für $x = a$ wird, und von welcher die erſten, zweyten &c. Funktionen des Zählers und Nenners, alle durch den nemlichen Werth von x unendlich werden. Sezt man nun $a = i$ ſtatt x und den Zähler und Nenner in eine Reihe verwandelt, ſo wird ſie

$$\frac{\sqrt{i} + \frac{i}{2\sqrt{a}} + \&c.}{\sqrt{2ai} + \frac{i\sqrt{i}}{2\sqrt{2a}} + \&c.} = \frac{1}{\sqrt{2a}} + \frac{\sqrt{i}}{2\sqrt{2.a}} + \&c.$$

ſo daß, wenn man $i = o$ macht, man (wenn $x = a$) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ für den geſuchten Werth des Bruches hat. In der That, wenn man zufolge der Methode von no. 39, die erſten Funktionen des Zählers und Nenners nimmt, ſo hat man:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{(x - a)}} \text{ und } \frac{x}{2\sqrt{(x^2 - a^2)}},$$

Größen, welche unendlich werden, wenn $x = a$; wenn man aber die eine und die andere mit $2\sqrt{(x - a)}$ multipliziret, ſo wird der neue Bruch ſeyn

$$\frac{\frac{\sqrt{(x - a)}}{\sqrt{x}} + 1}{\frac{x}{\sqrt{(x + a)}}},$$

welcher, wenn man $x = a$ macht, $\frac{1}{\sqrt{2a}}$, wie oben, wird.

Wir

Wir haben alſo die Schwierigkeiten, welche in der E wickelung von $f(x+i)$ zuſammentreffen können, gehobe und obgleich wir nur algebraiſche Funktionen bet achtet l ben, ſo iſt es nicht ſchwer, unſre Auflöſungen auch auf tr cendentiſche Funktionen auszudehnen. Da dieſe Schwier keiten nur für beſondere Werthe von x ſtatt finden, ſo klar, daß ſie nicht den geringſten Einfluß auf die abgelei ten Funktionen $f'x$, $f''x$ &c. haben; aber es war no wendig ſie zu unterſuchen und die Mittel, dieſe Schwier keiten zu heben, anzugeben, um keine Wolke über die Theorie zu laſſen.

45.

Man kann nicht allein durch dieſe Theorie direkte Glieder der Entwickelung von der Funktion $f(x+i)$ n den Potenzen von i finden; ſondern man kann auch üb haupt jede beliebige Funktionen, nach den ſteigenden P tenzen einer der veränderlichen Größen, welche in Funktion enthalten iſt, entwickeln.

In der That, wenn man die Formel

$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2}f''x + \frac{i^3}{2.3}f'''x +$$

wieder vornimmt, und hier x und i zwey unbeſtimmte G ßen ſind, ſo kann man $x-i$ an die Stelle von x ſet welches geben wird:

$$fx = f(x-i) + if'(x-i) + \frac{i^2}{2}f''(x-i) +$$

Man kann hier auch xz an die Stelle von i ſetzen und n erhält:

$$fx = f(x-xz) + xzf'(x-xz) + \frac{x^2z^2}{2}f''(x-xz) +$$

wo z irgend eine willkührliche Größe iſt.

Hier ſtellt fx, wie man ſiehet, eine Funktion von x vor nd $f'(x - xz)$, $f''(x - xz)$, &c. ſtellen die erſten, zweyn &c. Funktionen von fx vor, indem man $x(1 - z$ an ie Stelle von x ſetzet. Aber obgleich fx nur eine Funktion on x in Hinſicht auf ihre abgeleitete Funktionen vorſtellet, iſt es klar, daß ſie überhaupt eine jede beliebige Funkon von x und von andre Größen vorſtellen kann, wenn ur dieſe Größen in der Bildung der abgeleiteten Funkonen $f'x$, $f''x$, &c. als beſtändige Größen angeſehen erden.

Wenn man in der vorhergehenden Formel $z = o$ achet, ſo wird die Gleichung identiſch, $fx = fx$, und acht man $z = 1$, ſo verſchwindet die Größe $x - xz$; daß, wenn man, für $x = o$, die Werthe der Funkonen fx, $f'x$, $f''x$, &c. nur durch $f.\ f'.\ f''.$ &c., bezeichet, man erhält

$$fx = f + xf' + \frac{x^2}{2} f'' + \&c.$$

Alſo, wenn fx eine gegebene Funktion von mehrern veränderlichen Größen x, y, &c. ſeyn wird, ſo braucht man nur durch die allgemeine Regeln die abgeleitete Funktionen in Beziehung auf x allein zu ſuchen und darinn nachgehends $x = o$ zu machen; daher wird man alle Glieder von der Entwicklung der Funktion nach den ſteigenden Potenzen von x haben; und es iſt klar, daß die Werthe der Größen $f'.\ f''.$ &c. Funktionen von y &c. ohne x ſeyn werden, welche alle von der urſprünglichen Funktion nach einem Geſetze abgeleitet ſind, welches von der Art, wie die Größe x in dieſe Funktion gekommen iſt, abhängen wird.

46.

Man hätte das vorige Problem, auf eine weit le
tere Art auflösen können, wenn wir sogleich

$$fx = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$$

angenommen hätten, wo A, B, C, &c. unabhäng
Größen von x sind. Um sie zu bestimmen, erwäge m
daß, da diese Gleichung identisch seyn soll, sie auch
alle Werthe von x statt finden muß. Macht man
1tens $x = 0$, so hat man $f. = A$; 2tens, nimmt m
die ersten Funktionen aller ihrer Glieder (no. 33.), so
man noch die identische Gleichung

$$f'x = B + 2Cx + 3Dx^2 + \&c.,$$

oder macht man aufs neue $x = 0$, so hat man $f'. =$
3tens, nimmt man aufs neue die ersten Funktionen,
erhält man

$$f''x = 2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 + \&c.$$

oder, machet man wiederum $x = 0$, so hat man $f'' =$
Fährt man auf eben diese Art fort, so findet man

$$f'''. = 2.3D, f^{iv} = 2.3.4E \&c.,$$

woraus man

$$A = f. B = f'., C = \tfrac{1}{2} f''., D = \frac{1}{2.3} f''', \&$$

findet, welches durch die Substitution die nemliche Re
für fx wie oben geben wird. Aber diese Art ist we
ger direct als die vorhergehende, und sie setzet schon
Theorie der abgeleiteten Funktionen zum voraus; sie
übrigens weniger strenge, indem sie voraussetzt, daß
Summe aller mit x behafteten Glieder, für $x = 0$,
Null wird, obgleich die Coeffizienten dieser Glieder in
abgeleiteten Gleichungen ins Unendliche zunehmen; a
der große Vortheil der vorhergehenden Methode beste
da

arinn, daß ſie das Mittel angiebt, die Entwickelung der
leihe, bey welchem Gliede man nur immer will, anhalten
nd den Werth von dem Reſte der Reihe ſchätzen zu
nnen.

Dieſes Problem, eines der wichtigſten in der Theo-
e der Reihen, iſt noch nicht auf eine allgemeine Art
ufgelöſt worden. Man könnte ſolches wirklich für
de Funktion insbeſondere auflöſen, durch die im Anfang
no. 11.) gezeigten Methoden; aber es würde unmöglich
yn, auf dieſem Wege zu einer allgemeinen Auflöſung
r jede beliebige Funktion zu gelangen.

47.

Wir wollen alſo die oben (no. 45.) gefundne allge-
leine Formel wieder vornehmen:

$$fx = f(x - xz) + xzf'(x - xz) + \frac{x^2z^2}{2} f''(x - xz) + \&c.;$$

nd wollen annehmen, daß man beym erſten Gliede
(x — xz) anhalten will. Da alle folgende Glieder mit
multiplizirt ſind, ſo nehmen wir an

$$fx = f(x - xz) + xP;$$

iſt als eine Funktion von z angeſehen, welche Null
n ſoll, wenn z = 0, weil alsdann $f(x - xz)$ zu fx
rd.

Da dieſe Gleichung ſtatt haben ſoll, was auch der Werth
n z ſeyn mag, der willkührlich iſt, ſo wird ſeine erſte
leichung in Beziehung auf x alſo auch ſtatt haben
o. 33). Man wird daher die erſte Funktion in Beziehung
f dieſe veränderlichen Größe nehmen, und es iſt leicht
ſehen, daß die erſte Funktion des Gliedes $f(x - xz)$
n wird $-xf'(x - xz)$. Denn man hat (no. 31.) ge-

sehen, daß wenn $y = f.p$, wo p eine Funktion vor ist, man hat

$$y' = p'f'p;$$

nimmt man also z an der Stelle von x und ma $p = x - xz$, so hat man

$p' = -x$ und $y' = -xf'p = -xf'(x - xz)$.

Also, weil fx nicht z enthält, so wird die erste Gleich in Beziehung auf z seyn

$$o = -xf'(x - xz) + xP',$$

P′ ist die erste Funktion von P in Beziehung auf z; n aus

$$P' = f'(x - xz)$$

entstehet. Man wird also den Werth von P haben, w man eine Funktion von z suchet, von welcher die e Funktion gleich $f'(x - xz)$ ist und die überdem von Beschaffenheit ist, daß sie für $z = o$ zu Null wird. dieser Werth von P solchergestalt gefunden, so hat m wenn man $z = 1$ machet

$$fx = f. + xP.$$

Wenn wir zweytens annehmen

$$fx = f(x - xz) + xzf'(x - xz) + x^2Q,$$

Q ist eine Funktion von z, welche Null seyn soll, wie m siehet, wenn $z = o$.

Nimmt man wie oben die ersten Funktionen in ziehung auf z, so wird man folgende erste Gleichu haben:

$o = -xf'(x-xz) + xf'(x-xz) - x^2zf''(x-xz) + x^2$

wo die Funktionen, durch f', f'' bezeichnet, die ersten zweyten Funktionen von fx in Beziehung auf x sind, in welche man nachgehends $x - xz$ statt x gesetzet Man erhält daraus, wenn man das, was sich vernich ausstreichet,

$$Q' = zf''(x - xz);$$

ſo daß man den Werth von Q haben wird, wenn man eine Funktion von z ſuchet, von welcher die erſte Funktion den Werth hat, welchen man ſo eben für Q' gefunden, und welcher die Eigenſchaft hat, Null zu werden, wenn $z = 0$. Macht man nachher $z = 1$, ſo hat man

$$fx = f. + xf'. + x^2Q.$$

Es ſey drittens

$$fx = f(x - xz) + xzf'(x - xz) + \frac{x^2z^2}{2} f''(x - xz) + x^3R,$$

R iſt eine Funktion von z, welche verſchwindet, wenn $z = 0$. Man wird finden, wenn man die erſten Funktionen in Beziehung auf z nimmt, und die Glieder, welche ſich wechſelweiſe vernichten, auslöſcht

$$R' = \frac{z^2}{2} f'''(x - xz),$$

die Funktion durch f''' vorgeſtellt iſt die dritte Funktion von fx in Beziehung auf x umgeformt, durch die Subſtitution von $x - xz$ ſtatt x. Man muß alſo, um den Werth von R zu haben, eine urſprüngliche Funktion von z zu finden, deren erſte Funktion der vorhergehende Werth von R' ſey, und die ſo beſchaffen iſt, daß ſie verſchwindet wenn $z = 0$. Iſt dieſe Funktion gefunden, ſo hat man, wenn man $z = 1$ machet,

$$fx = f. + xf'. + \frac{x^2}{2} f''. + x^3R,$$

und ſo weiter.

Fährt man ſo fort, ſo hat man die Formel von

§. 45.

$$fx = f + xf' + \frac{x^2}{2} f'' + \frac{x^3}{2.3} f''' + \&c.$$

Aber die vorhergehende Analyſe hat den Vortheil die

Mittel zu zeigen, wie man die Reste xP, x^2Q, x^3R, der Reihe erhalten soll, wenn man bey dem ersten, zw ten, dritten etc. Gliede einhalten will.

48.

Hier ist also das Problem analytisch aufgelößt: da die Größen P, Q, R, &c. nur durch ihre erste F tionen bekannt sind, so bleibt uns noch übrig, von i Funktionen zu den ursprünglichen Funktionen zurüd steigen; welches öfters sehr schwer und selbst unmö ist. Indessen kann man Grenzen dieser Größen fin welches hinreichen wird, um den Irrthum zu schä den man begehen kann, wenn man sich mit einigen ersten Glieder von einer Reihe begnügt.

Deswegen wollen wir diesen allgemeinen Lehrsatz setzen: Wenn eine erste Funktion von z, so wie $f'z$, in positiv für alle Werthe von z ist, von $z = a$ bis $z = b$ (b ist $> a$) der Unterschied der ursprünglichen Fun nen, welche diesen zwey Werthen von z entsprechen, lich, $fb - fa$, wird nothwendig eine positive Größe

Wir wollen die Funktion $f(z + i)$ betrachten, welcher die Entwickelung

$$fz + if'z + \frac{i^2}{2} f''z + \&c.$$

ist. Wir haben gesehen, daß man immer die Größe klein nehmen kann, daß jedes beliebige Glied von i Reihe größer als die Summe aller folgenden wird 14). Also kann das Glied $if'z$ größer als das ü der Reihe werden; folglich, wenn $f'z$ eine positive G ist, so könnte man i positiv und klein genug nehmen, mit die ganze Reihe

$$if'z + \frac{i^2}{2} f''z + \&c.$$

nothwendig einen poſitiven Werth hat; aber dieſe Reihe iſt

$$= f(z + i) - fz;$$

mithin, wenn $f'z$ eine poſitive Größe iſt, ſo könnte man ſtatt i eine poſitive Größe nehmen, welche klein genug iſt, damit die Größe

$$f(z + i) - fz$$

nothwendig poſitiv ſey.

Wir wollen an die Stelle von z nacheinander die Größen

$$a,\ a + i,\ a + 2i,\ a + 3i,\ \&c.\ a + ni$$

ſetzen, und es wird daraus hervorgehen, daß man i poſitiv und klein genug nehmen kann, damit daß alle Größen

$$f(a + i) - fa,\ f(a + 2i) - f(a + i),\ -f(a + 3i) - f(a + 2i),\ \text{bis } f[a + (n + 1)i] - f(a + ni$$

nothwendig poſitiv ſeyn, wenn die Größen

$$f'a,\ f'(a + i),\ f'(a + 2i),\ \&c.\ \text{bis } f'(a + ni)$$

poſitiv ſind. Alſo wird auch in dieſem Falle die Summe der erſten Größen, das heißt, die Größe

$$f[a + (n + 1)i] - fa$$

poſitiv ſeyn.

Wir wollen jetzt

$$a + (n + 1)i = b$$

machen, ſo hat man

$$i = \frac{b - a}{n + 1},$$

und man wird daraus ſchließen, daß die Größe $fb - fa$ nothwendig poſitiv iſt, wenn alle Größen

$f'a, f'(a+\frac{b-a}{n+1}), f'(a+\frac{2(b-a)}{n+1}) f'(a+\frac{3(b-a)}{n+1})$, &c.

bis

$$f'(a+\frac{n(b-a)}{n+1}),$$

positiv sind, man mag n so groß nehmen wie man will.

Daher wird um so mehr die Größe $fb - fa$ positiv seyn, wenn $f'z$ immer eine positive Größe ist, und man z alle mögliche Werthe giebt, von $z = a$, bis $z = b$, weil sich unter diesen Werthen nothwendig die Werthe

$$a, a+\frac{b-a}{n+1}a+\frac{2(b-a)}{n+1}, \text{etc.}\, a+\frac{n(b-a)}{n+1},$$

finden werden, man mag n auch noch so groß nehmen.

49.

Mit Hülfe dieses Lehrsatzes kann man Grenzen des Zu- und Abnehmens aller ursprünglichen Funktionen, von welchen man die erste Funktion kennet, finden. Es sey die ursprüngliche Funktion Fz von welcher die erste Funktion $F'z$, durch z^mZ ausgedrückt ist, Z ist eine gegebene Funktion von z. Es sey M der größte und N der kleinste Werth von Z, nemlich für alle Werthe von z, welche zwischen den Größen a und b enthalten sind, indem man die kleinern negativen als die größten und die größern negativen als die kleinsten ansiehet, welches dem Gange des Calculs gemäß ist, weil z. B.

$$-1 > -2, \quad -5 > -7,$$

und ebenfalls $-2 < -1$ und so auch von den andern. Folglich werden die Größen $M - Z$ und $Z - N$ immer positiv seyn, von $z = a$ bis $z = b$, und es ist eben so mit den Größen

$$z^m(M - Z) \text{ und } z^m(Z - N).$$

Also

ſo 1ſtens, wenn man

$$f'z = z^m(M - Z),$$

acht, ſo wird man durch den vorigen Lehnſatz haben

$$fb - fa > o; \text{ da } z^mZ, = F'z$$

t, ſo wird ihre urſprüngliche Funktion Fz ſeyn, und da
l eine beſtändige Größe iſt, ſo iſt die urſprüngliche Funk-
on von

$$Mz^m, = \frac{Mz^{m+1}}{m+1},$$

eil die erſte Funktion, von dieſer hier, kraft der allge-
eine Regel (no. 14.)

$$\frac{(m+1)Mz^m}{m+1} = Mz^m$$

. Man wird alſo haben,

$$fz = \frac{Mz^{m+1}}{m+1} - Fz;$$

nd macht man hinter einander

$$z = a \text{ und } z = b,$$

giebt die Gleichung $fb - fa > o$,

$$\frac{Mb^{m+1}}{m+1} - Fb - \frac{Ma^{m+1}}{m+1} + Fa > o;$$

oraus man erhält,

$$Fb < Fa + \frac{M(b^{m+1} - a^{m+1})}{m+1}.$$

2tens, wenn man

$$f'z = z^m(Z - N)$$

acht, ſo hat man auch $fb - fa > o$, und man wird
ie oben, finden,

$$fz = Fz - \frac{Nz^{m+1}}{m+1};$$

acht man hintereinander $z = a$ und $= b$, ſo wird die
leichung $fb - fa > o$, geben,

$$Fb - \frac{Nb^{m+1}}{m+1} - Fa + \frac{Na^{m+1}}{m+1} > 0;$$

woraus man erhält

$$Fb > Fa + \frac{N(b^{m+1} - a^{m+1})}{m+1},$$

50.

Wir wollen diese Resultate auf die Größen P, Q R, &c. von no. 47 anwenden. Da diese Größen al Funktionen von z angesehen sind, so nehmen wir gleic $P = Fz$ an, und folglich

$$P' = F'z = f'(x - xz);$$

also, da man $F'z = z^m Z$ hat, so nehme man $m =$ und man wird haben

$$Z = f'(x - xz),$$

Jetzt wollen wir $a = 0$ und $b = 1$ annehmen, und di Bedingung der Funktion P, welche Null seyn soll, wen $z = 0$, wird $Fa = 0$ geben, und dann wird Fb de Werth von P seyn, welcher $z = 1$ entspricht.

Wenn also M und N, der größte und der kleinst Werth von $f'(x - xz)$ in Beziehung auf alle Werth von z, von $z = 0$ bis $z = 1$ sind, so wird man

$$Fb < M \text{ und } > N,$$

haben. Folglich werden M und N die beyden Grenze der Größe P seyn, wenn man darinn $z = 1$ machet.

Wir wollen im zweyten Fall $Q = Fz$ annehmen, s hat man

$$Q' = F'z = zf''(x - xz);$$

folglich, macht man $m = 1$, so hat man

$$Z = f''(x - xz).$$

Es sey ebenfalls $a = 0$ und $b = 1$, so wird man auch durch die Bedingung der Funktion Q, welche Null seyn

l, wenn z Null iſt, Fa = o haben, und dann wird
dem Werth von Q gleich ſeyn, der z = 1 entſpricht.

Alſo, wenn M1 und N1 der größte und der kleinſte
lerth von $f''(x - xz)$ ſind, für alle Werthe von z,
n z = o bis z = 1, ſo hat man

$$Fb < \frac{M1}{2} \text{ und } > \frac{N1}{2},$$

daß

$$\frac{M1}{2} \text{ und } \frac{N1}{2}$$

ie Grenzen des Werthes Q ſeyn werden, wenn z = 1
t. Wir wollen drittens R = Fz annehmen, ſo hat man

$$R' = F'z = \frac{z^2}{2} f'''(x - xz).$$

lſo wenn man

$$m = 2,\ a = o,\ b = 1,$$

achet, ſo wird man auf eben die Art finden, daß wenn
2 und N2 der größte und der kleinſte Werth von

$$\tfrac{1}{2} f'''(x - xz)$$

id, indem man z alle Werthe von Null bis zur Einheit
ebt, man

$$\frac{M2}{2.3} \text{ und } \frac{N2}{2.3}$$

r die Grenzen des Werthes der Größe R haben wird,
nn man darinn z = 1 macht, u. ſ. w.

51.

Jetzt iſt es klar, daß wenn man z in einer Funktion
x(1 − z), alle Werthe, von z = o, bis z = 1,
bt, die Werthe welche dieſe Funktion dann erhält,
rden die nemlichen ſeyn, welche eine ähnliche Funktion
u erhalten würde, wenn man u alle Werthe von

u = 0

$u = o$ bis $u = x$, nach einander gebe; denn macht man $x(1-z) = u$, so giebt $z = o$, $u = x$ u. $z = 1$ giebt $u = o$, und die Zwischenwerthe von z, werden Werthe von u zwischen diesen hier geben. Woraus man leicht schließen kann, daß die Größen M und N die größten und kleinsten Werthe von $f'u$ in Beziehung auf alle Werthe von u, von $u = o$ bis $u = x$ seyn werden; und daß folglich jeder Zwischenwerth, zwischen M und N, durch fu ausgedrückt werden kann, wenn man u einen Zwischenwerth zwischen o und x giebt. Also kann der Werth von der Größe P in Beziehung auf $z = 1$, durch $f'u$ ausgedrückt werden, wo u eine Größe zwischen o und x ist. Man wird daraus ebenfalls folgern, daß der Werth von Q, welcher $z = 1$ entspricht, durch $\frac{1}{2}f''u$ ausgedrückt werden kann, wenn man der u einen Zwischenwerth zwischen o und x giebt. Und eben so, daß der Werth von R, in Beziehung auf $z = 1$, durch $\frac{1}{2.3}f'''u$, ausgedrückt werden kann, wenn man für u eine Größe zwischen o und x nimmt, u. s. w.

52.

Hieraus fließt endlich dieses neue und durch seine Einfachheit und Allgemeinheit merkwürdige Theorem, daß, wenn man durch u, eine unbekannte aber in den Grenzen von o und x begriffene Größe bezeichnet, man nach einander eine jede Funktion von x und anderer Größen, wie sie auch seyn mögen, nach den Potenzen von x auf folgende Art entwickeln kann:

$fx =$

$$fx = f. + xf'u,$$
$$= f. + xf'. + \frac{x^2}{2} f''u,$$
$$= f. + xf'. + \frac{x^2}{2} f''. + \frac{x^3}{2.3} f'''u,$$
&c.

o die Größen $f.$, $f'.$, $f''.$, &c. die Werthe von der Funk- on fx und ihrer abgeleiteten $f'x$, $f''x$ &c. ſind, wenn an $x = o$ machet.

53.

Alſo, für die Entwickelung von $f(z + x)$ nach den otenzen von x, wird man

$$f. = fz, f'. = f'z, f''. = f''z, \text{ &c.}$$

aben, wo man bemerken wird, daß die Größen $f'z$, $''z$, &c. ebenfalls die erſten, zweyten etc. Funktionen on fz ſind, welches augenſcheinlich iſt, denn es iſt ſichtbar, aß

$$f'(z + x), f''(z + x), \text{ etc.}$$

leichfalls, die erſten, zweyten etc. Funktionen von $f(z+x)$ nd, man mag ſie in Beziehung auf x oder auf z neh- en, weil die Vermehrung von $z + x$ dieſelbe iſt, wenn an x in $x + i$ oder z in $z + i$ verändert.

Nimmt man alſo $f'z$, $f''z$, etc. für die fz abgeleitete unktionen, ſo hat man

$$f(z + x) = fz + xf'(z + u),$$
$$= fz + xf'z + \frac{x^2}{2} f''(z + u),$$
$$= fz + xf'z + \frac{x^2}{2} f''z + \frac{x^3}{2.3} f'''(z+u),$$
&c.

) u eine unbeſtimmte aber in den Grenzen von o und begriffne Größe bezeichnet.

Wenn

Wenn man z in x und x in i verändert, so wird man die Entwickelung von $f(x + i)$ nach den Potenzen von i haben; und man siehet, daß in dieser Entwickelung die unendliche Reihe, um mit einem beliebigen Gliede anzufangen, immer dem Werth dieses ersten Gliedes gleich ist, wenn man $x + j$ an die Stelle von x setzet, weil j eine Größe zwischen o und i ist; daß folglich, der größte und der kleinste Werth dieses Gliedes, in Beziehung auf alle Werthe von j, von o an bis i, die Grenzen des Werthes vom übrigen der Reihe bis ins unendliche fortgesetzt, seyn werden.

Wenn man $fz = z^m$ macht, so wird man die Entwickelung des Binom $(z + x)^m$ haben, und man wird daraus folgern, daß die Summe aller Glieder, um bey einem beliebigen Gliede anzufangen,

$$\frac{m(m-1)\ldots(m+n+1)}{1.2\ldots n} z^{m-n} x^n,$$

zwischen diese Grenzen

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} z^{m-n} x^n \text{ und}$$

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} (z+x)^{m-n} x^m$$

eingeschlossen seyn wird; denn es ist augenscheinlich, daß der größte und kleinste Werth von $(z+u)^{m-n}$, seyn wird

$$(z+x)^{m-n} \text{ und } z^{m-n}.$$

Die Vollkommenheit der Annäherungsmethoden, in welchen man die Reihen gebraucht, hängt nicht allein von der Convergenz der Reihe, sondern auch davon ab, daß man den Irrthum schätzen könne, der von den vernachlässigten Gliedern entstehet, und in dieser Rücksicht kann man sagen, daß meist alle Annäherungsmethoden, von welchen man in der Auflösung der geometrischen und mechanischen

Probleme

Probleme Gebrauch macht, noch ſehr unvollkommen ſind. Das vorhergehende Theorem kann in in ſehr vielen Fällen dienen, dieſe Methoden die ihnen fehlende Vollkommenheit zu geben, ohne welche es öfters gefährlich iſt, ſie zu gebrauchen.

54.

Bis jetzt haben wir nur die abgeleiteten Funktionen betrachtet, in ſo fern ſie zu der Bildung der Reihen dienen können; aber dieſe Funktionen an und für ſich betrachtet, bieten ein neues Syſtem von algebraiſchen Operationen dar, und geben Umformungen, welche von einem unermeßlichen Nutzen in der ganzen Analyſis ſind.

Wir haben ſchon (no. 33.) geſehen, daß, wenn man eine beliebige Gleichung von x und y oder nur von x hat, welche für jeden beliebigen Werth von x ſtatt haben ſoll, ſo werden die abgeleiteten Gleichungen, welche man erhält, wenn man die abgeleiteten Funktionen eines jeden Gliedes, der vorgeſetzten nimmt, ebenfalls ſtatt haben. Eine jede dieſer Gleichungen und ſelbſt eine beliebige Verbindung dieſer Gleichungen, kann alſo ſtatt der urſprünglichen Funktion dienen, und man wird oft durch dieſes Mittel Hülfsgleichungen erhalten, die einfacher und leichter aufzulöſen ſind als die Hauptgleichungen.

Wir nannten, erſte, zweyte etc. Gleichungen etc., die abgeleiteten Gleichungen, welche man erhält, wenn man die erſten, zweyten etc. Funktionen, aller Glieder der gegebenen urſprünglichen Gleichung nimmt; wir werden aber überhaupt, abgeleitete Gleichungen der erſten Ordnung, der zweyten Ordnung etc. diejenigen nennen, welche man durch eine beliebige Verbindung, der urſprünglichen Gleichung und ihrer erſten

Glei-

Gleichung, oder von dieser hier und der zweyten Gle chung, bilden kann, u. s. w. Wenn also die ursprüngl che Gleichung x und y enthält, so wird die von der e sten Ordnung abgeleitete Gleichung x, y und y' enthalte und die von der zweyten abgeleiteten Gleichung wird y, y' und y'' enthalten, u. s. w.

55.

Wir werden durch einige Beyspiele den Gebrauch d abgeleiteten Gleichungen für die Umformung der Fu tionen zeigen. Wir werden sogleich bemerken, daß m durch die Verbindung einer Funktion mit ihrer erf Funktion, einen beliebigen Exponenten verschwinden l sen kann. In der That es sey die Gleichung $y = X$ und X eine beliebige Funktion von x, wenn man d die erste Funktion nimmt, so hat man (no. 32).

$$y' = mX^{m-1}X'.$$

Dividirt man diese Gleichung durch die vorhergehen so hat man

$$\frac{y'}{y} = \frac{mX'}{X}, \text{ also } Xy' - mX'y = 0,$$

welches eine abgeleitete Gleichung der ersten Ordnung wo die Potenz X^m sich nicht mehr befindet, und wel in diesem Zustande viel bequemer ist um den Werth d y in einer Reihe, durch die gebräuchliche Methode unbestimmten Coeffizienten zu entwickeln.

Z. B. Es sey

$$X = a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc},$$

und man nehme an

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc}.$$

Nimmt man die ersten Funktionen, so erhält man:

$$X' = b + 2cx + 3dx^2 + \text{etc},$$
$$y' = B + 2Cx + 3Dx^2 + \text{etc};$$

wenn man alſo die mit einerley Potenz von x behafteten Glieder ſubſtituirt und vereiniget, ſo hat man

$$aa - mbA + [2aC + bB - m(2cA + bB)]x + [3aD + 2bc + cB - m(3dA + 2cB + bC)]x^2 + \text{etc.} = 0,$$

eine Gleichung, die identiſch ſeyn ſollte, das heißt, die ſtatt finden ſoll, was auch x ſeyn mag, damit der angenommene Ausdruck von y wahr ſey, und die daher eben ſo viel einzelne Gleichungen giebt, als verſchiedne Potenzen von x da ſind. Man wird aus dieſen Gleichungen erhalten

$$B = \frac{mbA}{a};$$

$$C = \frac{2maA + (m - 1)bB}{2a};$$

$$D = \frac{3mdA + (2m - 1)cB + (m - 2)bC}{3a},$$

etc.

Man wird ſo nach einander alle Coeffizienten B, C, D, etc durch Formeln finden, deren Geſetz ſichtbar iſt, und das man folglich ſo weit fortſetzen kann, als man will.

Aber der erſte Coeffizient A bleibt unbeſtimmt; man muß, um ihn zu beſtimmen, zu der urſprünglichen Gleichung $y = X^m$ zurückkehren. Macht man $x = 0$, ſo hat man auf einer Seite $X = a$, und auf der andern $y = A$; alſo $A = a^m$.

56.

Man kann eben ſo durch die abgeleiteten Funktionen die Logarithmen, die Exponentialgrößen und die sinus und cosinus verſchwinden laſſen. In der That, wenn $y = X$, ſo hat man die Gleichung der erſten Ordnung

$$y'X - X' = 0;$$

wenn $y = 0$ ſo hat man folgende

$$y' - X'y = 0.$$

Um aber den sinus und cosinus verſchwinden zu l
müſſen wir zu einer Gleichung von der zweyten Ord
gehen. Es ſey alſo $y = \sin. X$, wo X immer
beliebige Funktion von x iſt. Nimmt man die erſten
tionen, ſo hat man (no. 32) $y' = X' \cos. X$, und n
man von neuem die erſten Funktionen:

$$y'' = X'' \cos. X - X'^2 \sin. X.$$

Eliminirt man alſo in dieſen drey Gleichungen sin. X
cos. X, ſo hat man folgende abgeleitete Gleichung
der zweyten Ordnung:

$$X'y'' - X''y' + X'^3 y = 0,$$

wo keine tranſcendente Größen mehr ſind. Man
dieſelbe Gleichung finden, wenn man $y = \cos. x$ m

Wenn man alſo hier für X und y dieſelben S
tutionen wie oben (no. 55.) macht, und man (nach
die Glieder nach den Potenzen von x geordnet ſind)
Summe aller derjenigen, welche mit einerley Potenz
x multiplizirt ſind, der Null gleich ſetzt, ſo wird man
ſo viele particulaire Gleichungen haben, welche dazu di
werden, die unbeſtimmten Coeffizienten des angenom
nen Ausdruckes von y' durch die beyden vorhergeher
zu beſtimmen. In Betreff der beyden erſten werde
unbeſtimmt bleiben; aber man muß ſie ſo beſtimmen,
die urſprüngliche und die erſte Gleichung ſtatt fin
wenn man $x = 0$ machet. Alſo die Gleichung $y = si$
wird dann $A = \sin. a$, und die Gleichung

$$y' = X' \cos. X \text{ wird } B = b \cos. a,$$

57.

Die abgeleitete Gleichung der zweyten Ordnung, welche
r ſo eben fanden, kann nicht allein dazu dienen, den
erth von sin. X oder cos. X in einer Reihe zu ent-
ckeln, ſondern auch eine andere Umformung von
ſem Werthe durch Hülfe der Exponentialgrößen zu
den. Wir wollen wirklich $y = e^v$ annehmen, e
die Zahl, von welcher der hyperboliſche Logarithmus
: Einheit iſt (no. 20.) und V iſt eine unbeſtimmte Funk-
n von x. Nimmt man die erſten und zweyten Funk-
nen, ſo hat man:

$$y' = V'e^v, \quad y'' = (V'^2 + V'')e^v).$$

enn dieſe Werthe in der Gleichung, von der hier die
de iſt, ſubſtituirt werden, ſo erhält man, nach der
viſion mit der Größe e^v, welche alle Glieder davon
ltipliziret:

$$X'(V'' + V'^2) - X''V' + X'^3 = 0.$$

h bemerke, daß man dieſer Gleichung gnüge leiſten kann,
nn man

$$V' = mX''$$

cht, wo m ein beſtändiger Coeffizient iſt, welches

$$V'' = mX''$$

bt; denn ſubſtituirt man dieſe Werthe, ſo bringt man
t Gleichung auf

$$(1 + m^2)X'^3 = 0;$$

alſo $1 + m^2 = 0$ und $m = \sqrt{-1}$.

an wird daher haben:

$$V' = X'\sqrt{-1};$$

wenn man von da zu der urſprünglichen Gleichung
ufſteigt,

$$V = X\sqrt{-1} + k,$$

a ist eine willkührliche beständige Größe, mithin

$$e^V = e^{a+X\sqrt{-1}} = e^a . e^{X\sqrt{-1}} = Ae^{X\sqrt{-}}$$

wenn man mehrerer Einfachheit wegen $e^a = A$ mach

Man hat also $y = Ae^{X\sqrt{-1}}$, und da die Wu größe $\sqrt{-1}$ ebenfalls plus oder minus genommen t den kann, so hat man ebenfalls

$$y + Be^{-X\sqrt{1}}$$

B ist eine andere willkührliche beständige Größe. Es wirklich leicht zu sehen, daß ein jeder dieser Werthe Gleichung

$$X'y'' - X''y' + X'^3 = 0;$$

gnüge leistet; und man sieht auch eben so leicht, daß re Summe auch noch gnüge leistet, weil die Größen y, y''. darinn nur unter der linearischen Form sind. A hin wird man überhaupt haben:

$$y = Ae^{X\sqrt{-1}} + Be^{-X\sqrt{-1}}.$$

A und B sind von neuem unbestimmte Coeffizienten oben.

Hier ist also der Ausdruck von sin. x. in einen Ex nential-Ausdruck durch Hülfe der abgeleiteten Gleichu der zweyten Ordnung umgeformt worden. Aber da diese zwey Ausdrücke völlig identisch seyn, so muß n noch die beständigen Größen A und B schicklich bestimm welches durch die Vergleichung der Werthe von y und für einen beliebigen Werth von X geschehen wird. also sin. X durch die Natur der sinus Null werden wenn $X = 0$ ist, so muß man $A + B = 0$ haben; n mehr, da $y = X'$ cos. X, und da der vorhergeh Ausdruck von y,

$$y' = X'\sqrt{-1}\,(Ae^{X\sqrt{-1}} - Be^{-X\sqrt{-1}})$$

gie

giebt, ſo wird man haben:

$$\cos. X = \sqrt{-1}\,(Ae^{X\sqrt{-1}} - Be^{-X\sqrt{-1}}).$$

Macht man $X = 0$, ſo weiß man, daß $\cos. X = 1$; alſo

$$\sqrt{-1}\,(A - B) = 1,$$

Dieſe beyden Gleichungen geben

$$A = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \text{ und } B = -\frac{1}{2\sqrt{-1}};$$

alſo endlich

$$\sin. X = \frac{e^{X\sqrt{-1}} - e^{-X\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\cos. X = \frac{e^{X\sqrt{-1}} + e^{-X\sqrt{-1}}}{2},$$

bekannte Ausdrücke, welche wir auch ſchon auf eine andere Art gefunden haben. (no. 27.)

58.

In den vorhergehenden Beyſpielen haben wir die abgeleitete Gleichung geſucht, und nachher durch dieſe Gleichung den Werth der urſprünglichen Funktion y beſtimmt. Dieſe letzte Operation iſt, wie man ſieht, das umgekehrte von derjenigen, durch welche man von der urſprünglichen Funktion zu der abgeleiteten herunter ſteigt; ſie kann immer vermittelſt der Reihen ausgeführt werden, wenn man, wie wir es gemacht haben, eine Reihe mit unbeſtimmten Coeffizienten gebraucht, und man einzelne Gleichungen von den Gliedern, welche mit jeder Potenz von x behaftet ſind, macht. Auf dieſe Art beſtimmt man die Coeffizienten, einen durch den andern, und man hat oft den Vortheil, das allgemeine Geſetz zu bemerken, welches unter dieſen Coeffizienten herrſcht.

Aber man kann auch jeden Coeffizienten unmittelbar du
die Methode von no. 45. und folgenden finden. Denn m
braucht nur nach einander die Werthe der abgeleite
Funktionen zu suchen, und bezeichnet man durch (y'), (
(y''), &c. die Werthe von y, y', y'', &c., wenn x =
so hat man überhaupt:

$$y = (y) + x(y') + \frac{x^2}{2}(y'') + \&c.$$

Diese Formel hat den Vortheil, daß sie die Ursache z
warum unbestimmte Coeffizienten bleiben, wie wir o
gefunden haben. In der That, will man den Werth
y durch eine abgeleitete Gleichung der ersten Ordnung
stimmen, so wird diese Gleichung den Werth von y
x und y geben, und dadurch wird man eine Gleich
von der zweyten Ordnung in y'', y', y, x, eine von
dritten Ordnung in y''', y'', y', y, x, u. s. w. finden;
daß wenn man nach einander in diesen Gleichungen,
Werthe von y', y'', &c., welche durch die vorhergehen
Gleichungen gegeben sind, substituirt, so wird man bey
letzten Analyse y', y'', y''', &c. in x und y ausgedr
haben. Macht man also x = o, so hat man:

(y'), (y''), (y'''), &c.

ausgedrückt in (y) welche unbestimmt bleiben wird.

Desgleichen, wenn man die Bestimmung von y
von einer abgeleiteten Gleichung der zweyten Ordn
von x, y, y' und y'' abhängen läßt, so wird man dar
nach einander eine dritte Gleichung, zwischen x, y,
y'', y''', u. s. w. erhalten; und durch auf einander
gende Substitutionen, wird man bey der letzten Analyse,
y''', &c. in x, y, y' gegeben, haben; so daß, wenn
x = o machet, man die Werthe von (y''), y'''), (
&c. in (y) und (y') ausgedrückt haben wird. Die

den (y) und (y′) bleiben unbeſtimmt und ſo weiter. Geht man alſo von einer abgeleiteten Gleichung von der erſten Ordnung aus, ſo bleibt eine unbeſtimmte (y): geht man von einer Gleichung der zweyten Ordnung aus, ſo bleiben zwey unbeſtimmte (y), und (y′), u. ſ. w.; und man ſiehet, daß dieſe unbeſtimmten beſtändig ſind, weil ſie die Werthe von y, y′, y″, &c. ſind, wenn x = o.

59.

Obgleich die vorhergehende Schlußfolge auf die Theorie der Reihen gegründet iſt, ſo iſt es nicht ſchwer, ſich zu überführen, daß ſie allgemein ſtatt finden muß, was auch der Ausdruck von y ſey, weil man immer einen Ausdruck in der Reihe, als die Entwickelung eines endlichen Ausdrucks, anſehen kann. Da aber dieſes eine charakteriſtiſche Eigenſchaft der zwiſchen zwey veränderlichen Größen abgeleiteten Gleichungen iſt, ſo iſt es wichtig, dieſe Concluſion auf die Natur dieſer Gleichungen ſelbſt feſtzugründen.

Wir wollen überhaupt die Gleichung von zwey veränderlichen Größen $F(x,y) = o$ betrachten, und durch $F(x,y)' = o$ die erſte Gleichung, durch $F(x,y)'' = o$ die zweyte Gleichung bezeichnen u. ſ. w., indem x und y zugleich als veränderlich angeſehen werden. Es ſeyn a, b, c, &c. in der Funktion $F(x,y)$ enthaltene beliebige beſtändige Größen. Dieſe beſtändigen Größen werden dieſelben in den abgeleiteten Funktionen ſeyn; alſo da die zwey Gleichungen

$$F(x,y) = o \text{ und } F(x,y)' = o$$

zu gleicher Zeit ſtatt haben, ſo kann man eine beſtändige Größe a daraus eliminiren, und die daraus folgende Gleichung wird eine Gleichung der erſten Ordnung zwi-

schen x, y und y' seyn, welche eine beständige Größe weniger, als die ursprüngliche Funktion enthalten wird, und welche folglich zu gleicher Zeit, wie diese, statt finden wird. Eben so kann man aus den drey Gleichnngen

$$F(x,y) = o,\ F(x,y)' = o,\ F(x,y)'' = o,$$

welche zu gleicher Zeit statt finden, zwey beständige Größen a, b eliminiren und die daraus folgende Gleichung wird eine Gleichung der zweyten Ordnung zwischen x, y, y' und y'' seyn, welche zwey beständige Größen weniger als die ursprüngliche Gleichung enthalten wird, und welche, so wie sie, zu gleicher Zeit statt findet, u. s. w.

Da also in den Gleichungen von zwey veränderlichen Größen eine Gleichung von der ersten Ordnung, eine beständige Größe weniger als die ursprüngliche Gleichung enthalten kann, und eine Gleichung der zweyten Ordnung, zwey beständige Größen weniger enthalten kann, als die ursprüngliche Gleichung u. s. w.: so folgt daraus wiederum, daß die ursprüngliche Gleichung eine beständige Größe mehr als die abgeleitete Gleichung von der ersten Ordnung enthalten muß, zwey beständige Größen mehr als die abgeleitete Gleichung von der zweyten Ordnung u. s. w., beständige Größen, die folglich willkührlich sind; und es ist zu gleicher Zeit sichtbar, daß sie nicht mehr enthalten können, weil man sie nicht alle durch die abgeleiteten Gleichungen verschwinden lassen kann.

Wenn man also zur Bestimmung einer Funktion nur eine Gleichung der ersten Ordnung oder der zweyten, oder &c. hat, so sollte die ursprüngliche Gleichung, in ihrer ganzen Allgemeinheit genommen, ein oder zwey &c. willkührliche beständige Größen enthalten, nach der Ordnung der gegebenen Gleichung, und man wird diese beständi-

ändigen Größen durch gegebene particulaire Werthe von
er Funktion, oder ihren abgeleiteten, beſtimmen.

Findet man alſo auf irgend eine Art eine Gleichung
on x oder y, welche einer gegebenen Gleichung von
elliebiger Ordnung genüge leiſtet, und welche ſo viele
illkührliche beſtändige Größen enthält, als Einheiten in
em Anzeiger dieſer Ordnung ſind, ſo ſchließt man dar-
us, daß dieſe Gleichung die urſprüngliche Gleichung
er gegebenen Gleichung iſt, und wird in allen Fällen,
att dieſer hier, gebraucht werden können.

60.

Statt die beyden beſtändigen Größen a und b der
rey Gleichungen

$$F(x,y) = o,\ F(x,y)' = o,\ F(x,y)'' = o,$$

gleicher Zeit zu eliminiren, braucht man nur die be-
ändigen Größen b oder a der beyden erſtern zu elimini-
n; man wird alſo zwey Gleichungen der erſten Ordnung
aben, von welchen die eine nur die beſtändige Größe a,
nd die andere die beſtändige Größe b enthalten wird. Eli-
inirt man jetzt, in jeder dieſer Gleichungen, die beſtändigen
rößen a oder b, vermittelſt ihrer erſten Gleichung, ſo
ird man zwey Gleichungen der zweyten Ordnung ohne
und b haben, welche mit der Gleichung, die aus der
eichzeitigen Eliminirung dieſer beſtändigen Größen her-
rgegangen iſt, genau übereinſtimmen muß, und dieſes
rmittelſt folgender drey Gleichungen:

$$F(x,y) = o,\ F(x,y)' = o,\ F(x,y)'' = o.$$

eil der Werth von y'', welchen dieſe Gleichungen von
r zweyten Ordnung geben werden, und welcher in x,
und y' ohne a und b ausgedrückt werden wird, nur

derselbe seyn kann, auf welche Art er auch von der ursprünglichen Gleichung abgeleitet seyn mag.

Daraus kann man schließen, daß eine Gleichung der zweyten Ordnung von zwey besondern Gleichungen der ersten Ordnung, von welcher eine jede willkührliche beständige Größe mehr in sich hält, abgeleitet werden kann. Man wird auf eben die Art beweisen, daß eine Gleichung von der dritten Ordnung von drey verschiednen Gleichungen der zweyten Ordnung, deren jede eine willkührliche beständige Größe enthält, abgeleitet werden kann; u. s. w.

Man siehet zu gleicher Zeit, daß wenn man für eine gegebene Gleichung von der zweyten Ordnung zwey von der ersten Ordnung findet, deren eine jede dieser Gleichung genüge leistet, und wovon eine jede eine willkührliche beständige Größe a oder b enthält, man unmittelbar die ursprüngliche Gleichung ableiten könnte; denn es würde hinreichend seyn, die Größe y′ aus diesen Gleichungen wegzubringen, und man würde eine Gleichung von x und y, mit zwey willkührlichen beständigen Größen a und b haben.

Es ist eben so mit den Gleichungen der dritten Ordnung; denn, findet man drey Gleichungen der zweyten Ordnung, deren eine jede ein und derselben Gleichung der dritten Ordnung genüge leistet, und welche zu gleicher Zeit die willkührliche beständigen Größen a, b, c, haben, so hat man, wenn man y′ und y″ eliminirt, eine Gleichung von x, y und a, b, c, welche folglich die ursprüngliche Gleichung der gegebenen Gleichung seyn wird; und so weiter.

61.

61.

Aber wenn man ſtatt einer Gleichung der zweyten Ordnung zwey der erſten Ordnung findet, die gnüge leiſten, und von welchen eine einzige, eine willkührliche beſtändige Größe enthält; indem man nun y' eliminirt, ſo hat man eine Gleichung von x und y, welche nur eine willkührliche beſtändige Größe enthält, und welche nicht die urſprüngliche vollkommne Gleichung der vorgegebenen von der zweyten Ordnung iſt. Dieſe Gleichung wird aber benfalls den beyden der erſten Ordnung genüge thun, weil ſie der Gleichung der zweyten Ordnung genüge leiſtet, welche ebenfalls von dieſer hier abgeleitet iſt; folglich kann ſie als die urſprüngliche vollkommne Gleichung der Gleichung der erſten Ordnung, welche keine willkührliche beſtändige Größe enthält, angeſehen werden. Ich folgere daraus, daß im Fall eine Gleichung von der erſten Ordnung von x y und y' vorgegeben iſt, wenn man auf irgend eine Art eine Gleichung der zweyten Ordnung davon ableitet, es ſey indem man eine beſtändige Größe eliminirt oder nicht, und daß man hernach eine andre urſprüngliche Gleichung von der erſten Ordnung mit einer willkührlichen beſtändigen Größe a findet, man durch die Eliminirung von y' zwiſchen dieſen hier und den vorgegebenen, eine Gleichung zwiſchen x und y haben wird, welche die willkührliche beſtändige Größe a enthält, und welche folglich die urſprüngliche vollkommne Gleichung der vorgegebenen ſeyn wird.

Man wird auf eben die Art beweiſen, daß wenn man von der vorgegebenen der erſten Ordnung eine Gleichung der dritten Ordnung ableitet und man hiernach für dieſe hier eine urſprüngliche Gleichung der zweyten

Ord-

Ordnung mit einer willkührlichen beständigen Größe fände, in welcher die vorgegebene nicht enthalten sey, so braucht man nur die y'' und y' vermittelst der vorgegebenen zu eliminiren, und man wird eine Gleichung in x und y haben, welche eine willkührlich beständige Größe enthalten wird, und welche folglich die ursprüngliche vollkommne Gleichung der vorgegebenen seyn wird, u. s. w. Man kann dieselben Schlüße auf Gleichungen von höherer Ordnung, als die erste, anwenden, und ähnliche Schlußfolgen daraus ziehen.

62.

Wenn also eine Gleichung der ersten Ordnung von x, y und y' gegeben ist, so kann man sie durch beliebige Operationen zu der Form $f(x,y)' = o$ zurückbringen, wo $f(x,y)'$ die erste Funktion einer Funktion von x,y bezeichnet, welche durch $f(x,y)$ angedeutet wird. Man wird auf der Stelle die ursprüngliche Funktion $f(x,y) = a$ haben, in welcher a die willkührliche beständige Größe seyn wird. Z. B. Die Gleichung $y' = o$ giebt auf der Stelle $y = a$; die Gleichung

$$xy' - y = o$$

durch x^2 dividirt, wird

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = o.$$

Ich verstehe unter $\left(\frac{y}{x}\right)'$ die erste Funktion der Größe $\frac{y}{x}$ zwischen den beyden Hakens, woraus man $\frac{y}{x} = a$, erhält, oder dividirt man dieselbe Gleichung mit xy, so wird sie

$$\frac{y'}{y}$$

$$\frac{y'}{y} - \frac{1}{x} = 0,$$

in welcher die veränderlichen Größen x, y nicht mehr gemiſcht ſind. Nimmt man alſo die erſte Funktion eines jeden Gliedes, ſo hat man

$$ly - lx = la.$$

Der Buchſtabe l zeigt die hyperboliſchen Logarithmen an. Aus jenem erhält man, wie oben:

$$\frac{y}{x} = a.$$

Ueberhaupt, wenn man die Gleichung zu der Form

$$fx + y' Fy = 0$$

zurückbringen kann, wo die veränderlichen getrennt ſind, ſo braucht man nur die urſprünglichen Funktionen von fx und $y'Fy$ zu nehmen, und die Summe einer beſtändigen Größe a gleich zu machen; und daſſelbe wird ſtatt haben, wenn man die vorgegebene Gleichung zu dieſer Form

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$ zurückbringen kann.

Ich mache $\frac{y}{x} = u$;

alſo

$$y = xu,\ y' = xu' + u;$$

und die Gleichung wird durch dieſe Subſtitution

$$xu' + u = f.u,$$

welche man unter folgende Form

$$\frac{1}{x} + \frac{u'}{u - fu} = 0$$

bringen kann, die in der vorhergehenden enthalten iſt.

Hätte man die Gleichung $y = xf.y'$, ſo würde ich, ſtatt ſie auf die vorhergehende Form zubringen, lieber ihre erſten Funktionen nehmen. Daraus folgt die Gleichung

wel-

$$y' = xy''f'y' + fy',$$

welche zu der Form

$$\frac{1}{x} + \frac{y''f'y'}{fy' - y'} = 0$$

gebracht werden kann, und die, wenn man $y' = u$ machet, zum vorhergehenden Fall gehört. Da wir auf die Art eine ursprüngliche Gleichung zwischen x und u mit einer willkührlichen beständigen Größe, das heißt, zwischen x und y' gefunden haben, so wollen wir y' vermittelst der vorgegebenen Gleichung wegbringen, und wir werden eine Gleichung zwischen x und y mit der willkührlichen beständigen Größe haben, welche mithin die ursprüngliche vollkommne Gleichung der vorgegebenen seyn wird. Diese letzte Methode ist, wie man sieht, eine Anwendung der Theorie der vorhergehenden Nummer.

63.

Auf diese Art bringt man, wie man sieht, die Untersuchung der ursprünglichen Funktionen zweyer veränderlichen Größen auf die ursprünglichen Funktionen einer einzigen veränderlichen Größe zurück; da man aber gewöhnlich nur zum Zwecke kömmt, wenn man für x und y andre veränderliche Größen t, u gebraucht, das heißt, wenn man statt x und y gegebene Funktionen von t und u substituirt, so muß man in Hinsicht dieser Substitutionen bemerken, daß, wenn u eine Funktion von t wird, x und y ebenfalls als Funktionen von t angesehen werden müssen. Also nimmt man $y = fx$ an, so hat man (x und y sind jetzt als Funktionen von t angesehen),

$$y' = x'f'x \text{ (no. 31)};$$

sieht man y aber nur als eine Funktion von x an, so hat man $y' = f'x$, wie wir es bis jetzt gemacht haben. Um also

so

ſo von dieſer Hypotheſe zu der, wo x und y Funktionen von t ſind, überzugehen, muß man an die Stelle von y' die Größe $\frac{y'}{x'}$ ſetzen.

Alſo, hat man die Gleichung

$$y' = F(x,y).$$

Man macht den Anfang ſie umzuformen in

$$\frac{y'}{x'} = F(x,y), \text{ oder } y' = x'F(x,y),$$

nachher ſubſtituirt man für x, y, x', y', ihre Werthe in t, u und u', wo u' die erſte Funktion von u ſeyn wird, welche als eine Funktion von t angeſehen iſt. Eben ſo, weil y'' die erſte Funktion von y' und als Funktion von x angeſehen iſt, ſo muß man für y'' die Größe

$$\frac{\left(\frac{y'}{x'}\right)'}{x'},$$

das heißt,

$$\frac{y''}{x'^2} - \frac{y'x''}{x'^3},$$

ſubſtituiren; u. ſ. w.

Wenn man alſo in einer Gleichung, ſtatt daß man y als eine Funktion von x anſieht, wiederum x als eine Funktion von y anſehen wollte, ſo würde dann die erſte Funktion von y die Einheit werden, und man brauchte bloß $\frac{1}{x'}$ für y', $-\frac{x''}{x'^3}$ für y'' zu ſubſtituiren; u. ſ. w. Man ſehe unten no. 200.

64.

Was die Art anbelangt, die urſprünglichen Funktionen von den Funktionen einer einzigen veränderlichen Größe zu finden,

finden, wie von Fx oder $y'Fy$, so weiß man, daß, wenn Fx eine rationale Funktion von x ist, man sie immer in verschiedne Glieder von der Form x^m oder $\frac{1}{(a+bx)^m}$ auflösen kann. m ist hier eine ganze positive Zahl, und $a+bx$ ein Faktor des Nenner der Funktion, wenn er einen hat. Also die ursprüngliche Funktion von Fx wird von eben so viel Gliedern der Form

$$\frac{x^{m+1}}{m+1}, \text{ und } \frac{(a+bx)^{1-m}}{b(1-m)}, \text{ oder } lx \text{ und } \frac{l(a+bx)}{b}$$

wenn $m = 1$, zusammengesetzt seyn; und es wird eben so mit der ursprünglichen Funktion von $y'Fy$ (no. 32) seyn.

Wenn Fx irrationale Größen enthält, so wird man sie durch Substitutionen verschwinden lassen, welches allgemein durch die bekannten Methoden nur bey Wurzelgrößen folgender Form

$$\sqrt{(a+bx+cx^2)}$$

möglich ist. Wenn in Fx viel zusammengesetztere Wurzelgrößen sind, oder wenn selbst mehr als eine Wurzelgröße von dieser Form darinn ist, so wird die Untersuchung durch die bekannten Methoden im allgemeinen unmöglich; und man kann sie nur vermittelst der Reihen erhalten, es sey daß man die Wurzelgrößen durch ihre Auflösung in Reihen verschwinden läßt, oder daß man die allgemeine Methode für die Entwickelung einer jeden Funktion von x in Reihen, gebrauchte (no. 45). Deshalb setze man $f'x = Fx$; dadurch wird man haben:

$$f''x = F'x, f'''x = F''x, \text{ &c.}$$

Also wird der Werth der ursprünglichen Funktion fx von Fx auf folgende Art vorgestellt werden:

$$fx = f. + xF. + \frac{x^2}{2}F'. + \frac{x^3}{2.3}F''. \text{ &c.,}$$

die

e Größen $f.$, $F.$, $F'.$, &c. ſind die Werthe von fx, Fx, x, &c. wenn $x = o$ iſt; man ſiehet, daß $f.$ eine unſtimmte beſtändige Größe ſeyn wird.

65.

Wenn für eine vorgegebene Gleichung einer beliebi:n Ordnung man eine Gleichung einer niedern Ordung findet, welche keine willkührliche beſtändige Größen nthält, oder welche nicht ſoviel enthält, als ſie enthalten nnte, dann kann dieſe Gleichung nicht als eine urprüngliche vollkommne Gleichung angeſehen werdrn, ſie rd nur ein beſondrer Fall dieſer Gleichung ſeyn, in elchen man den willkührlichen beſtändigen Größen beſonere Werthe gegeben hätte

Es giebt aber einen ſehr ausgedehnten Fall, in welhen es hinreichend iſt, wenn man mehrere beſondere Werthe von y in x hat, um den vollkommnen Werth davon zu erhalten; es iſt der, wo die Gleichung einer beliegen Ordnung nur die y, y', y'', &c. unter der lineaſchen Form enthält.

Es ſey in der That die vorgegebene Gleichung

$$Ay + By' + Cy'' + Dy''' + \&c. = o$$

welcher A, B, C, &c. die gegebenen Funktionen von x ein ſind. Es ſeyen p, q, r, &c. verſchiedene Funktion von x, welche jede insbeſondere für y ſubſtituirt die Gleichung genüge leiſtet, ich ſage, daß man überupt haben wird:

$$y = ap + bq + cr + \&c,$$

b, c, &c. ſind willkührliche beſtändige Größen; welches genſcheinlich iſt; denn da dieſer Ausdruck von y in der lichen Gleichung ſubſtituirt iſt, ſo wird er unabhängig n dieſen beſtändigen Größen hier ein genüge leiſten. Dar-

aus folget, daß, wenn die Zahl der beſondern Werthe p, q, r, &c. gleich iſt der Ordnung der vorgegebenen Gleichung, das heißt, gleich dem Anzeiger der höchſten abgeleiteten Funktion $y'''^{etc.}$; ſo wird man den vollkommnen Ausdruck von y haben. Die Analyſe von no. 57 liefert ein Beyſpiel von dieſer Methode. Aber man hat noch mehr; man kann dann auch den vollkommnen Werth von y finden, welcher der Gleichung

$$Ay + By' + Cy'' + \&c. = X,$$

genüge leiſten wird. X iſt auch eine beliebige Funktion von x.

Da dieſe Methode eine der nützlichſten in dieſer Art von Analyſe iſt, ſo halte ich es für nöthig, ſolche hier in wenigen Worten abzuhandeln.

66.

Wir wollen vorausſetzen, daß die vorgegebene Gleichung von der dritten Ordnung ſey, man wird leichte ſehen, daß die Methode für jede beliebige Ordnung gemein iſt. Es ſey alſo die Gleichung

$$Ay + By' + Cy'' + y''' = X,$$

und es ſeyen p, q, r, drey verſchiedene und beſondere Werthe von y in x, welche der Gleichung

$$Ay + By' + Cy'' + y''' = o$$

genüge leiſten; ſo daß man hätte

$$Ap + Bp' + Cp'' + p''' = o, \quad Aq + Bq' + Cq'' + q''' =$$

$$\text{und } Ar + Br' + Cr'' + r''' =$$

Wir wollen annehmen

$$y = ap + bq + cr,$$

u. a,b,c, als drey unbekannte Funktionen von x betrachtet, welche wir beſtimmen ſollen. Wenn man die erſten, zweyten und dritten Funktionen von y nimmt, ſo hat man

$$y'$$

$$y' = ap' + bq' + cr' + pa' + qb' + rc'.$$

Ich ſetze voraus

$$pa' + qb' + rc' = 0,$$

ſo werde ich nur haben

$$y' = ap' + bq' + cr';$$

woraus ich erhalte, wenn ich wieder die erſten Funktionen nehme,

$$y''' = ap''' + bq''' + cr''' + a'p'' + b'q'' + c'r''.$$

Ich ſetze jetzt dieſe Werthe von y, y', y'' und y''' in der vorgegebenen Gleichung. Es iſt ſichtbar, daß durch die Natur der Größen p, q, r, die Glieder, welche a, b, c, enthalten, ſich zerſtören werden, und es wird nur die Gleichung

$$a'p'' + b'q'' + c'r'' = X$$

bleiben, welche mit den beyden vorgegebenen Gleichungen verbunden

$$a'p + b'q + c'r = 0,$$

$$a'p' + b'q' + c'r' = 0,$$

die drey Größen a', b', c', zu beſtimmen dienen werden, da die Größen p, q, r und ihre erſten und zweyten Funktionen, ſo wie die Größen X, bekannt ſind.

Wir wollen alſo annehmen, daß man

$$a' = P, \quad b' = Q, \quad c' = R$$

gefunden hätte, da dieſe Größen P, Q, R, bekannte Funktionen von x ſind; man darf ſie alſo nur als erſte Funktionen anſehen und die urſprünglichen Funktionen davon ſuchen, deren jede eine willkührliche beſtändige Größe enthalten wird, die ihr beygefügt werden kann. Man wird auf die Art die Werthe der unbekannten Größen a, b, c, haben, welche man nachher in den Ausdruck von y ſetzen wird.

$x dx$, also $p' = e^{-M} \cdot M'$

67.

Ist die Gleichung nur von der ersten Ordnung, braucht man nur einen Werth p, und man kann ihn dan immer finden; denn man hat alsdann die Gleichung

$$Ap + p' = o,$$

welcher dieser Werth $p = e^{-M}$ genüget. M ist die u sprüngliche Funktion von A, so daß $M' = A$, und e im mer die Zahl bezeichnet, von welcher der hyperbolisc Logarithmus die Einheit ist; in der That, man wird wenn man die ersten Funktionen nimmt, haben:

$$p' = -M'e^{-M} = -Ap.$$

Für die Gleichungen einer höhern Ordnung als die ers giebt es keine allgemeine Methode, um die Werthe vo p, q, &c. zu finden, es sey denn, daß die Coeffizient A, B, C, &c. nicht beständig sind. Aber in diesem Fal ist es leichter sie zu finden; denn man braucht nu $p = e^{mx}$ anzunehmen da m eine unbestimmte beständig Größe ist, und man hat

$$p' = me^{mx},\ p'' + m^2e^{mx},\ \&c.$$

Also die Gleichung

$$Ap + Bp' + Cp'' + Dp''' + \&c. = o$$

wird

$$A + Bm + Cm^2 + Dm^3 + \&c. = o$$

werden, welche um allgemein zu sprechen, von einem Gra seyn wird, der gleich der Ordnung der vorgegebene Gleichung ist. Sie wird also so viel Wurzeln haben al es Einheiten in diesem Grade giebt; und wenn man die Wurzeln durch m, n, &c. bezeichnet, so hat man

$$p = e^{mx},\ q = e^{nx},\ \&c.;$$

so daß in diesem Falle die Schwierigkeit auf die An ung der Gleichungen zurückgebracht ist.

68.

Man kann oft durch Subſtitutionen Gleichungen linear machen, die es nicht ſind, und da dieſe Umformung immer vortheilhaft iſt, ſo folgen hier zwey ſehr ausgedehnte Fälle, wo ſie glücklich angewendet wird. Der erſte iſt der von der Gleichung

$$y = xfy' + Fy',$$

welche allgemeiner iſt als die, von welcher wir oben (no. 58) handelten. Ich nehme ihre erſten Funktionen, und erhalte:

$$y' = xy''f'y' + fy' + y''Fy'.$$

Ich mache $y' = z$, und folglich $y'' = z'$, und erhalte

$$z = xz'f'z + fz + z'F'z,$$

eine Gleichung von der erſten Ordnung von x und z, wo z für eine Funktion von x gehalten wird. Jetzt betrachte ich x als eine Funktion von z; man müßte $\frac{1}{x}$ an die Stelle von z'(no. 63) ſetzen; daraus entſtehet die Gleichung:

$$xf'z + (fz - z)x' + F'z = 0,$$

welche wie man ſiehet von der erſten Ordnung und linear in x iſt. Man könnte alſo durch die vorhergehende Methode davon die urſprüngliche Gleichung in x und z finden; aber die vorgegebene Gleichung wird durch die Subſtitution von y' ſtatt z:

$$y = xfz + Fz.$$

eliminirt man alſo z aus dieſen beyden Gleichungen, ſo wird man eine Gleichung in x und y haben, welche die urſprüngliche Gleichung von der vorgegebenen Gleichung genau wird. Der zweyte Fall iſt der von der Gleichung

$$y' + My^2 + N = 0,$$

M und N sind Funktionen von x. Hier mache ich

$$y = \frac{z'}{Mz},$$

welches giebt

$$y' = \frac{z''}{Mz} - \frac{z'^2}{Mz^2} - \frac{z'M'}{M^2z};$$

substituirt man diese Werthe und multiplizirt mit Mz, so wird die Gleichung

$$z'' - \frac{M'z'}{M} + MNz = 0,$$

welche, wie man siehet, von der zweyten Ordnung aber in Beziehung auf z lineairisch ist.

Wir wollen annehmen, daß man auf irgend eine Art zwey besondere Werthe von y in x gefunden hätte, das heißt, ohne eine willkührliche beständige Größe, welche wir durch p und q bezeichnen wollen. Für den Werth p wird man haben:

$$\frac{z'}{Mz} = P,$$

woraus man $z = e^P$ erhält, durch P wird die ursprüngliche Funktion von pM bezeichnet; man wird eben so für den Werth q haben: $z = e^Q$, wo Q die ursprüngliche Funktion von qM ist. Hat man also zwey besondere Werthe von z, so wird man den vollkommnen Werth haben (no. 65)

$$z = ae^P + be^Q,$$

a und b sind zwey willkührliche beständige Größen; also, weil

$$y = \frac{z'}{Mz} \text{ und } P' = pM,\ Q' = qM,$$

so wird man diesen vollkommnen Werth von y haben,

$$y = \frac{aP'e^P + bQ'e^Q}{M(ae^P + be^Q)} = \frac{apMe^P + bqMe^Q}{M(ae^P + be^Q)}$$

$$y = \frac{ape^{P} + bqe^{Q}}{ae^{P} + be^{Q}},$$

das heißt, wenn man $\frac{b}{a} = c$, machet, ſo iſt

$$y = \frac{p + cqe^{Q-P}}{1 + ce^{Q-P}},$$

wo c die willkührliche beſtändige Größe iſt. Z. B. wenn $N = -mM$, wo m eine beſtändige Größe iſt, ſo iſt leicht zu ſehen, daß man der vorgegebenen Gleichung von y genüge leiſten wird, wenn man $y = \sqrt{m}$ machet. Man hat alſo wegen der Zweydeutigkeit der Wurzelgröße

$$p = \sqrt{m},\ q = -\sqrt{m}.$$

Nennt man alſo L die urſprüngliche Funktion von M, ſo hat man:

$$P = L\sqrt{m},\ Q = -L\sqrt{m},$$

und der vollkommne Werth von y wird ſeyn:

$$y = \frac{(1 - ce^{-2L\sqrt{m}})\sqrt{m}}{1 + ce^{-2L\sqrt{m}}}.$$

Uebrigens kann die vorgegebene Gleichung in dieſem Falle unter folgende Form dargeſtellt werden:

$$\frac{y'}{y^2 - m} + M = 0,$$

wo die veränderlichen Größen x und y getrennt ſind, und von welcher man die urſprünglichen Funktionen, wie wir oben (no. 62. 64) gezeigt haben, finden kann.

69.

Wenn die vorgegebene Gleichung nicht lineariſch in y, y', y'', &c. iſt, oder wenn ſie nicht unter der vorhergehenden Form begriffen iſt; ſo kenne ich keine allgemeine

Methode um die gefundenen besondern Werthe, vollkommen zu machen; man kann aber immer durch Hülfe der Reihen dahin gelangen. Wir wollen in der That voraussetzen, daß für eine Gleichung der ersten Ordnung von x, y und y', der vollkommne Werth von y sey $f(x,a)$, wo a die willkührliche beständige Größe ist. Wenn man a einen besondern Werth h giebt, so wird die Größe $f(x,a)$; ein besondrer Werth von y, welchen wir p nennen, und welchen wir auf irgend eine Art als bekannt annehmen wollen. Wir wollen jetzt $a = h + i$ machen, und die Funktion

$$f(x, h + i)$$

in einer steigenden Reihe nach den Potenzen von i entwickeln. Das erste Glied wird seyn: $f(x, h) = p$, und die andere Glieder werden von der Form

$$qi + ri^2 + \&c.$$

seyn. q, r, &c. sind Funktionen von x.

Wenn man diesen Ausdruck von y in der gegebenen Gleichung der ersten Ordnung substituirt, so muß sie sich, unabhängig von der beständigen Größe i, welche willkührlich bleiben soll, bestättigen.

Es sey also $y' = F(x, y)$ die Gleichung von der ersten Ordnung, welcher der besondere Werth $y = p$ genüge leistet, man wird, dieser Bedingung zufolge, haben $p' = F(x, p)$. Wir wollen für y die Reihe

$$p + iq + i^2r + \&c.$$

substituiren und die Funktion $F(x,y)$ in einer Reihe nach den Potenzen von i entwickeln, wenn man bloß durch $F'(y)$, $F''(y)$, &c. die ersten, zweyten &c. Funktionen von $F(x,y)$ in Beziehung auf y allein genommen, bezeichnet, und man der Kürze wegen

$$o = iq + i^2r + \&c.$$

machet,

nachet, ſo hat man, durch die Theorie über die Entwikelung, welche oben auseinander geſetzt iſt:

$$F(x,y) = F(x,p) + oF'(p) + \frac{o^2}{2} F''(p) + \&c.$$

Auf einer andern Seite hat man, wenn man die erſten Funktionen nimmt,

$$y' = p' + q'i + r'i^2 + \&c.$$

Wenn man nun dieſe Werthe in der Gleichung von der erſten Ordnung ſubſtituirt, und die Glieder nach den Potenzen von i ordnet, ſo hat man wegen

$$p' = F(x,p),$$

$$iq' + i^2r' + \&c. =$$

$$iqF'(p) + i^2[rF'(p) + \frac{q^2}{2} F''(p)] + \&c.;$$

woraus man durch die Vergleichung der mit einerley Potenzen von i behafteten Glieder folgende Gleichungen erhält:

$$q' = qF'(p), r' = rF'(p) + \frac{q^2}{2} F''(p), \&c.,$$

welche alle unbekannte Größen q, r, &c. nach einander, zu beſtimmen dienen werden. Da die Größen $F'(p)$, $F''(p)$ &c. von x gegebene Funktionen ſind, ſo iſt esſichtbar, daß man für dieſe unbekannten Größen nur lineariſche Gleichungen von der erſten Ordnung haben wird, bey welcher die Methode von no. 67. angewendet werden kann; es wird ſelbſt nicht einmal nöthig ſeyn, die vollkommnen Werthe von q, r, &c. zu haben, es iſt hinreichend, beliebige Werthe zu haben, welche dieſen höheren Gleichungen genüge thun.

Haben wir auf dieſe Art die Werthe der Größen von q, r, s, &c. beſtimmt, ſo hat man folgenden vollkommnen Werth von y,

$$y = p + iq + i^2r + \&c.$$

in welcher i die willkührliche beständige Größe seyn w
die dem besondern Werth $y = p$ fehlte. Dieser We
wird wirklich durch eine Reihe ausgedrückt seyn, aber
Convergenz dieser Reihe wird nur von dem Werthe
beständigen Größe i abhängen.

Diese Methode ist mit der gehörigen Ausdehn
auch anwendbar auf Gleichungen von höherer Ordn
als der ersten; aber die Gleichungen, welche man für
Bestimmung der unbekannten Funktionen finden w
werden von der nemlichen Ordnung seyn, und folg
wird man im allgemeinen die Werthe dieser Funktio
nur in dem Falle finden können, wo die Coeffizienten
ständig seyn werden.

Uebrigens, ist diese Methode der Grund der vor
lichsten Probleme von der Theorie der Planeten. Da
Excentricitäten und die Inclinationen, welche man
willkührliche beständige Größen ansehen soll, sehr k
sind, und die Wirkung der Attractionen ebenfalls s
klein ist, so giebt uns der Kreis sogleich besondere W
the, und man ergänzt nachher diese Werthe durch F
hen, welche nach den Potenzen dieser sehr kleinen best
dizen Größen fortgehen. Man sehe vorzüglich d
Theorie des Mondes von Euler nach.

70.

Wir haben vorausgesetzet, daß die Funktion $F(x,$
durch die Substitution von

$$p + qi + ri^2 + \&c.$$

statt y, sich immer in einer steigenden Reihe nach i
ganzen Potenzen von i entwickeln läßt. Da aber d

Re

us der Entwickelung einer Funktion von y + o hervor-
het, wenn man y einen beſondern Werth p giebt, ſo
lget aus der Theorie, welche wir oben (no. 40) gege-
n haben, daß dieſe Entwickelung bruch- oder negative
otenzen von o enthalten könnte, in welchem Falle die
ſagte Reihe nothwendig ähnliche Potenzen von i ent-
elte. Dann würde die Reihe, welche den Werth von y
rſtellen ſoll, nicht mehr dieſelbe Form haben. Da aber
$= f(x,a)$ und man

$$a = h + i \text{ und } p = f(x,y)$$

nimmt, ſo wird das erſte Glied immer p ſeyn, und das
ęyte Glied könnte noch von der Form qi angenommen
erden; denn wenn es von der Form qi^n wäre, wo n ein
liebiger Exponent iſt, ſo brauchte man nur $i^{\frac{1}{n}}$ an die
telle von i zu ſetzen, und anzunehmen, daß a zu $h + i^{\frac{1}{n}}$
ürde, welches gleichgültig iſt, weil man i als eine be-
ändige Größe anſieht; aber die folgende Glieder können
on der Form

$$ri^m + si^n + \&c.$$

yn, wo m durch Hypotheſe > 1, $n > m$, &c. ſeyn
llte. Setzet man alſo in $F(x,y)$ für y, die Reihe

$$p + qi + ri^m + si^n + \&c.$$

nd entwickelt man nach den ſteigenden Potenzen von i,
o wird man eine Reihe von dieſer Form haben:

$$F(x,p) + Pi^{\mu} + Qi^{\nu} + \&c.$$

iſt von der der Einheit verſchieden, $\nu < \mu$, &c. und
, Q ſind gegebene Funktionen von x. Alſo die Glei-
ung $y' = f(x, y)$ wird durch dieſe Subſtitutionen
erden:

$iq' +$

$iq' + i^m r' + i^n s' + \&c. = Pi^\mu + Qi^\varrho + \&c.$,

welche ſich unabhängig von den Werth i erweiſen ſollte.

Alſo, wenn $\mu > 1$, ſo kann man

$q' = 0$, $m = \mu$ und $r' = P$ nachher $n = \nu$, $s' = Q$, &c. machen. Man hat alſo ſogleich $q =$ einer beſtändigen Größe, oder einfacher $q = 1$; nachher, da P nur von q und x abhängt, wird man den Werth von z finden, wenn man die urſprüngliche Funktion von P nimmt: u. ſ. w.

71.

Aber, wenn $\mu < 1$, alsdann wird es unmöglich ſeyn der Gleichung genüge zu leiſten, ſo daß i eine willkührliche beſtändige Größe bleibt; und man müßte daraus ſchließen, daß, da auf dieſe Art der beſondere Werth p nicht ergänzt werden kann, er auch nicht in dem allgemeinen Ausdruck $f(x,a)$, welcher den vollkommnen Werth von y vorſtellt, enthalten ſeyn kann.

Jetzt iſt es ſichtbar, daß, was auch das erſte Glied Pi^μ der Entwickelung von $F(x,y)$ durch die Subſtitution von $p + qi + ri^m + \&c.$ an der Stelle von y ſeyn mag, es nur aus den Gliedern $p + qi$ kommen kann; daher es eben ſo viel iſt, als wenn man nur $p + qi$ an die Stelle von y ſetzte. Alſo auch die Entwickelung von $F(x,y)$, durch die Subſtitution von $p + o$ ſtatt x, wird ſeyn:

$$F(x,p) + \frac{Po^\mu}{q^\mu} + \&c.$$

Da nun die Reihe, welche aus dieſer Entwickelung hervorgeht, ein mit o^μ behaftetes Glied enthält, wo $\mu > 0$ und < 1 iſt, ſo folget aus der in no. 41. gegebenen Theorie, daß die erſte Funktion $F'(y)$ unendlich werden muß,

muß, wenn $y = p$. Daraus zieht man dieſe Concluſion, daß der beſondere Werth p nicht in den vollkommnen Ausdruck von y enthalten ſeyn kann, wenn dieſer Werth die Funktion $F'(y)$ unendlich, das heißt die Funktion $\frac{1}{F'(y)}$ zu Null macht. Umgekehrt wird die Gleichung $\frac{1}{F'(y)} = 0$ alle Werthe von y geben, welche, da ſie der Gleichung

$$y' = F(x,y)$$

genüge leiſten können, als beſondre Werthe nicht in dem vollkommnen Werthe mit begriffen ſind. Man könnte dieſe Werthe beſondere Werthe (valeurs ſingulières) nennen, um ſie von den andern zu unterſcheiden; und überhaupt, wird man urſprüngliche beſondere Gleichung, eine jede Gleichung von x und y nennen können, welche einer Gleichung von der erſten Ordnung oder von einer höhern Ordnung genüge leiſtet, und die nicht in der urſprünglichen vollkommnen Gleichung enthalten iſt, das heißt nicht ein beſondrer Fall dieſer Gleichung iſt.

72.

Wir haben ſo eben geſehen, daß es eine Gattung Gleichungen giebt, welche Gleichungen einer höhern Ordnung genüge leiſten können, und welche nicht den Gleichungen, von welchen dieſe hier abgeleitet werden können, genüge thun, weil ſie nicht in den vollkommnen Gleichungen einer niedern Ordnung als dieſe, mit begriffen ſind. Dieſe Gleichungen machen keine Ausnahme, in der Theorie, welche oben (no. 59.) auseinander geſetzt iſt. Aber ſie folgen aus einer beſondern Betrachtung, in der Art, wie die Gleichungen einer höhern Ordnung durch die Elimini-

minirung der beſtändigen Größen abgeleitet ſind. In der That, man hat geſehen, daß die zwey Gleichungen

$$F(x,y) = o \text{ und } F(x,y)' = o,$$

durch die Eliminirung einer beſtändigen Größe a eine abgeleitete Gleichung von der erſten Ordnung zwiſchen x, y und y' geben, von welcher $F(x,y) = o$ die urſprüngliche Gleichung ſeyn wird.

Es iſt aber augenſcheinlich, daß das Reſultat dieſer Eliminirung daſſelbe ſeyn würde, wenn die Größe a, ſtatt daß ſolche beſtändig iſt, eine beliebige Funktion von x wäre; aber in dieſem Falle würde die erſte Funktion von $F(x, y)$ nicht mehr bloß $F(x, y)'$ ſeyn, ſie würde einen Theil, welcher von der Veränderung a herkommt, mehr enthalten; und bezeichnet man durch $F'(a)$ die erſte Funktion von $F(x, y)$ in Beziehung auf die veränderliche Größe a genommen, ſo hat man $a' F'(a)$ für den Theil, von dem die Rede iſt, indem a' die erſte Funktion von a iſt, die als eine Funktion von x angeſehen wird. (no. 31). Alſo, in dem Fall, wo a eine Funktion von x wäre, würde die erſte Funktion von $F(x,y) = o$ ſeyn:

$$F(x,y)' + a' F'(a) = o;$$

damit ſie nun $F(x,y)' = o$ würde, wie in dem Falle, wo a beſtändig iſt, ſo müßte man $F(a) = o$ haben, eine Gleichung, welche den Werth von a zu beſtimmen dienen wird, und welche wie man ſiehet, nichts anders iſt, als die erſte Gleichung der urſprünglichen Gleichung in Beziehung auf a genommen. Daraus folget, daß, wenn man dieſen Werth von a in die urſprüngliche Gleichung $F(x,y) = o$ ſetzet, man eine Gleichung von x und y haben wird, welche ebenfalls der Gleichung der erſten Ordnung genüge leiſten wird, und welche nicht

in

in der urſprünglichen Gleichung, wo a die willkührliche beſtändige Größe iſt, mit begriffen iſt.

Man wird dieſelbe Theorie auf die Gleichungen höherer Ordnung anwenden können, und ähnliche Schlußfolgen daraus ziehen.

73.

Um nun zu ſehen ob die Gleichung, welche aus dieſer Betrachtung hervorgehet, daſſelbe iſt als die urſprüngliche beſondere Gleichung, die aus der Analyſe von no. 71. abgeleitet iſt; ſo wollen wir wie oben (no. 69) vorausſetzen, daß die Gleichung der erſten Ordnung zu der Form $y' = F(x,y)$, zurückgeführet, und daß ihre urſprüngliche vollkommne Gleichung $y = f(x,a)$ ſey. a iſt nemlich die beſtändige willkührliche Größe. Hieraus die urſprüngliche Gleichung, in welcher a veränderlich iſt, abzuleiten, wird man die erſte Gleichung in Beziehung auf a allein nehmen. Bezeichnet man durch $\phi(x,a)$ die erſte Funktion von $f(x,w)$ in Beziehung auf a genommen, ſo hat man

$$\phi(x,a) = 0;$$

woraus man a ziehen wird, welches man in $f(x,a)$ ſubſtituirt. Man erhält alsdann einen beſondern Werth von y, welcher auch der vorgegebenen Gleichung der erſten Ordnung genüge leiſten wird. Wir werden dieſen beſondern Werth p nennen, wie in der citirten Nummer.

Jetzt, da der vollkommne Werth $f(x,a)$ von y der Gleichung $y' = F(x,y)$ genüge thun ſoll, was auch die beſtändige Größe a ſey, ſo folget, daß, wenn man dieſe Subſtitution machet, die daraus entſtandene Gleichung

$$f'(x,a) = F[x,f(x,a)]$$

ſtatt haben muß, was auch der Werth von a ſey. Folglich ſoll ihre erſte Gleichung in Beziehung auf a genommen,

die

allein als veränderlich angeſehen iſt, ebenfalls ſtatt finden muß, was auch der Werth von a ſeyn mag. (no. 33). Da $f(x,a)$ in Beziehung auf x genommen iſt, ſo wird die erſte Funktion von dieſer hier in Beziehung auf a genommen, die zweyte Funktion von $f(x,a)$ ſeyn, die anfangs in Beziehung auf x und nachher in Beziehung auf a genommen wird, welche daſſelbe iſt (wie wir es weiter unten (no. 86.) zeigen werden) als die zweyte Funktion von $f(x,a)$, anfangs in Beziehung auf a, und nachher in Beziehung auf x genommen. Da wir alſo durch $\phi(x,a)$ die erſte Funktion von $f'(x,a)$ für die erſte Funktion von $f'(x,a)$ haben, in Hinſicht auf a genommen, ſo wird man $\phi'(x,a)$ haben, die ebenfalls in Hinſicht auf a genommen iſt. Die Striche, welche bey den Buchſtaben f und ϕ angebracht ſind, beziehen ſich nur auf die veränderliche Größe x. In Betreff der Funktion

$$F[x,f(x,a)],$$

da ſie durch die Subſtitution von $f(x,a)$ an der Stelle von y in $F(x,y)$ entſtehet, ſo wird ihre erſte Funktion in Beziehung auf a, durch

$$F'(y) \times \phi(x,a), \text{ (no. 31.)}$$

ausgedrückt werden, weil wir ſchon durch $F'(y)$ die erſte Funktion von $F(x,y)$ in Beziehung auf y, bezeichnet haben, und durch $\phi(x,a)$ die erſte Funktion von $f(x,a)$ oder y, in Beziehung auf a. Alſo wird die erſte Gleichung von der Gleichung

$$f'(x,a) = F(x,y),$$

in Beziehung auf a genommen

$$\phi'(x,a) = F'(y) + \phi(x,e)$$

ſeyn; wovaus man erhält

$$F'(y) = \frac{\phi'(x,a)}{\phi(x,a)}.$$

Wir haben ſo eben geſehen, daß, um den beſondern Werth p zu haben, man in $f(x,a)$ den Werth von a, welcher

welches aus der Gleichung

$$\phi(x,a) = o$$

gezogen wird, ſubſtituiren. Wir wollen durch x dieſen Werth von a bezeichnen, welches eine Funktion von x ſeyn wird, und man erhält:

$$\phi(x,a) = V(X - a)^m.$$

m iſt hier $> o$, und V iſt eine Funktion von x, welches für $a = X$ weder Null noch unendlich wird. Daraus wird man erhalten:

$$\phi'(x,a) = y' (X - a)^m + mVX'(X - a)^{m-1}.$$

Man hat alſo:

$$F'(y) = V' + \frac{mX'}{X - a}.$$

Aber y wird p, wenn $a = X$; alſo wird $F'(y)$ unendlich, wenn $y = p$, wie in dem Falle von no. 71. Mithin führen die zwey Methoden von no. 71. und 72. zu denſelben Reſultaten, und geben dieſelben beſondern Werthe; aber die zweyte hat den Vorzug mehr direct zu ſeyn, und giebt die wahre Metaphyſik, dieſer Gattung von Paradoxen.

74.

Wir wollen, um ein Beiſpiel zu geben, annehmen, daß die urſprüngliche Gleichung ſey:

$$x^2 - 2ay - a^2 - b^2 = o.$$

Wenn man die erſten Funktionen nimmt, ſo hat man die erſte Gleichung $x - ay' = o$.

Eliminirt man vermittelſt der urſprünglichen Gleichung, ſo hat man die Gleichung der erſten Ordnung:

$$x - [- y + \sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)}]y' = o,$$

von welcher jene die urſprüngliche Gleichung ſeyn
a iſt die willkührliche beſtändige Größe.

Wenn man jetzt die erſte Funktion der nemli
Gleichung

$$x^2 - 2ay - a^2 - b^2 = 0,$$

in Beziehung auf die Größe a, welche als eine Fun
von x angeſehen iſt, nimmt, ſo hat man

$$-2(y + a)a' = 0,$$

welches

$$y + a = 0, \quad a = -y$$

giebt; und ſetzet man dieſen Werth in beſagte Gleic
ſo hat man:

$$x^2 + y^2 - b^2 = 0.$$

Dieſe Gleichung wird folglich auch derſelben Gleic
der erſten Ordnung genüge thun; welches leicht zu e
ſen iſt; denn ſie giebt:

$$y^2 = b^2 - x^2 \text{ und } yy' = -x,$$

Werthe, welche, wenn ſie in der Größe

$$x + yy' - y'\sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)},$$

ſubſtituirt werden, ſie identiſch zu Null machen.
wird alſo die urſprüngliche beſondere Gleichung ſeyn.

In der That, zufolge der Theorie von no. 71,
man in dem gegenwärtigen Falle, haben

$$F(x,y) = \frac{x}{-y + \sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)}},$$

und

$$p = \sqrt{(b^2 - x^2)}.$$

Alſo, wenn man die erſten Funktionen in Beziehung
y allein nimmt, ſo findet man

$$F'(y) = -\frac{x}{[-y + \sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)}]\sqrt{(x^2 + y^2 -}}$$

eine Größe, welche, wie man ſieht, durch die Annahme

$$y = p = \sqrt{(b^2 - x^2)}$$

endlich wird.

75.

Wir wollen jetzt vorausſetzen, daß man die Gleichung n der erſten Ordnung $y' = Fy$ hätte, und daß die nktion Fy von y ſo beſchaffen ſey, daß ſie Null wird, nn y einer gegebenen beſtändigen Größe b gleich iſt; dann ſichtbar, daß dieſer Werth von y der Gleichung genü- leiſten wird; denn $y = b$ giebt auch $y' = o$. Man gt, ob dieſer Werth von y ein particulairer erth iſt, welcher in dem vollſtändigen Werth begriffen , oder ob es nur ein beſondrer (valeur ſingulière) erth iſt. Man wird die erſte Funktion von Fy nehmen, d wenn $F'y$ für $y = b$ unendlich wird, ſo wird der erth b nur ein beſondrer Werth ſeyn, widrigenfalls rd ſie ein particulairer Werth ſeyn.

Es ſey

$$Fy = K(y - b)^m.$$

iſt $> o$ und K eine beſtändige Größe, ſo wird man ben

$$F'y = mK(y - b)^{m-1}.$$

ſe Größe wird unendlich, wenn $m < 1$; alſo wird Werth $y = b$ ein beſondrer Werth ſeyn, wenn $m > o$ $m > 1$, und ein einfacher particulairer Werth, wenn = oder > 1. In der That, die Gleichung

$$y' = K(y - b)^m$$

(y — b)^m dividirt, und unter die Form

$$(y - b)^{-m} y' - K = o,$$

t, hat zur urſprünglichen Gleichung

$$\frac{(y - b)^{1-m}}{1 - m} - Kx = a.$$

a ist nemlich die willkührliche beständige Größe; d
erhält man:

$$y = b + [(m - 1)(a + Kx)]^{\frac{1}{1-m}}.$$

Also, um $y = b$ zu haben, muß die Größe

$$(a + Kx)^{\frac{1}{1-m}}$$

Null werden. Wenn aber $m > 0$ und < 1 ist, so
der Exponent $\frac{1}{1-m}$ positiv seyn. Mithin ist es u
lich a einen Werth zu geben, der die in Rede ste
Größe verschwinden ließe. Aber, wenn $m > 1$,
wird, wenn der Exponent $\frac{1}{1-m}$ negativ ist, die G

$$(a + Kx)^{\frac{1}{1-m}}$$

Null werden, wenn a unendlich seyn wird; denn
man $a = \frac{1}{c}$, so wird diese Größe:

$$\frac{c^{\frac{1}{m-1}}}{(1 + Kcx)^{\frac{1}{m-1}}}$$

werden, welche Null wird, wenn $c = 0$. Dasselb
det statt, wenn $m = 1$; alsdann enthält die urspr
che Gleichung Logarithmen oder Exponentialgrößen;
man hat

$$y' = K(y - b),$$

und dividirt man mit $(y - b$, so ist

$$\frac{y'}{y - b} - K = 0$$

von welcher die ursprüngliche Gleichung ist

$$l(y - b) - Kx - la,$$

woraus man erhält:

$$y = b + ae^{kx}.$$

e iſt die Zahl, von welcher der hyperboliſche Logarithmus die Einheit iſt, und a die willkührliche beſtändige Größe. Hier iſt es augenſcheinlich, daß wenn man x gleich Null macht, man $y = b$ haben wird. Wir wollen noch annehmen, daß

$$Fy = \sqrt{Y}.$$

F iſt eine Funktion von y, welche Null wird, wenn $y = b$. Man wird haben:

$$F'y = \frac{Y'}{2\sqrt{Y}};$$

alſo, weil Y Null wird, wenn $y = b$, im Fall Y' nicht zu eben der Zeit Null wird, ſo wird $F'y$ alsdann unendlich werden, und der Werth $y - b$ wird nur ein beſonderer Werth ſeyn. Damit alſo dieſer Werth ein einfacher particulairer Werth ſeyn, ſo muß Y' mit Y zu gleicher Zeit Null werden, wenn man $Y = b$ macht.

76.

Durch die Grundſätze, welche wir ſo eben, in Rückſicht der willkührlichen beſtändigen Größen, feſtgeſetzt haben, ſieht man, daß dieſe beſtändigen Größen die Verbindung zwiſchen den urſprünglichen und abgeleiteten Gleichungen machen: dieſe hier ſind durch ſich ſelbſt allgemeiner, als die Gleichungen, von denen ſie abſtammen, wegen der beſtändigen Größen, welche verſchwunden ſind, oder verſchwinden können. Sie ſind eigentlich allen urſprünglichen Gleichungen, welche unter ſich nur durch die Werthe dieſer beſtändigen Größen verſchieden wären, equivalent.

Man kann alſo immer von einer Gleichung, welche als urſprünglich angeſehen wird, zu einer abgeleiteteten, in einer beliebigen Ordnung übergehen, und umgekehrt,

von dieser zu jener zurückgehen, wenn nur diese letzten Operation immer willkührliche beständige Größen einführ und wenn man Sorge trägt, diese beständigen Größen a eine der ursprünglichen Gleichung gleichförmige Art, bestimmen, wie wir bereits davon Beyspiele (no. 55. fol.) gegeben haben. Mit dieser Aufmerksamkeit w man in der Analysis die Operationen in Beziehung a die Funktionen, eben so anwenden können, wie m darinn die gemeine Operationen der Algebra anwend Hat man also eine Gleichung von x und y, so kann daraus unmittelbar die abgeleiteten Gleichungen einer liebigen Ordnung ableiten, um aber von dieser hier einer Gleichung von x und y zurückzugehen, muß auf die willkührlichen beständigen Größen Rücksicht n men, und sie so bestimmen, daß die Werthe von y ihre abgeleiteten y', y'', &c. für einen gegebenen We von x, wie x = o, dieselben seyen, als die, welche der gegebenen Gleichung entstehen. Wenn die vorgegeb Gleichung nur von der ersten Ordnung von x, y, y', wäre, alsdann würden, da diese Gleichung nur Werthe von y', y'', &c. in x und y geben kann, Werthe für x = o den unbestimmten Werth von y halten; folglich würden alsdann die willkührlichen be digen Größen von diesem Werthe, welcher selbst willkührliche beständige Größe ist, abhängen; so, da diesem Falle alle willkührliche beständige Größen in einzige zusammenfallen würden. Sie würden aus der Ursache zu zwey willkührlichen beständigen Größen den, wenn die vorgegebene Gleichung von der zwe Ordnung von x, y, y' und y'' wäre; u. s. w.

77.

Um beſſer den Geiſt und den Gebrauch dieſer Ope-
tionen fühlen zu laſſen, wollen wir ſie noch auf einige
ſpiele anwenden, die zu gleicher Zeit als Uebungen im
ſen dienen werden.

Es ſey die Reihe gegeben

$$1 + \frac{m}{n}x + \frac{m(m+1)}{n(n+1)}x^2 + \frac{m(m+1)(m+2)}{n(n+1)(n+2)}x^3 + \&c.$$

n verlangt die Summe.

Wir wollen ſie gleich y annehmen, damit man eine
chung von x und y hat. Ich multiplizire dieſe Glei-
g mit x^{n-1}; dieſes giebt:

$$x^{n-1} = x^{n-1} + \frac{m}{n}x^n + \frac{m(m+1)}{n(n+1)}x^{n+1} + \&c.$$

nehme die erſten Funktionen von allen Gliedern, und

$$x^{n-1} + (n-1)yx^{n-2} = (n-1)x^{n-2} + mx^{n-1}$$
$$\frac{m(m+1)}{n}x^n + \frac{m(m+1)(m+2)}{n(n+1)}x^{n+1} + \&c.,$$

an ſiehet, daß ein Factor aus dem Nenner eines
Gliedes verſchwunden iſt.

Ich multiplizire jetzt die vorhergehende Gleichung
x^{m-2}, und erhalte folgende:

$$x^{m-1} + (n-1)yx^{m-2} = (n-1)x^{m-2} + x^{m-1}$$
$$\frac{m(m+1)}{n}x^m + \frac{m(m+1)(m+2)}{n(n+1)}x^{m+1} + \&c.$$

che das erſte Glied $= p'$ (p' iſt die erſte Funktion
), nehme die urſprüngliche Funktion, und ich habe:

$$\frac{n-1}{m-1}x^{m-1} + x^m + \frac{m}{n}x^{m+1} + \frac{m(m+1)}{n(n+1)}x^{m+2} + \&c.$$

Ich füge hier keine willkührliche beſtändige Größe bey, weil ſie, als in p enthalten, gedacht werden kann.

Wenn wir jetzt dieſe neue Reihe mit der vorgegebenen, die man gleich y angenommen hat, vergleichet, ſo iſt es ſichtbar, daß man die Gleichung

$$p = \frac{n-1}{m-1} x^{m-1} + x^m y$$

haben wird. Wenn man die erſten Funktionen nimmt, und für p' ihren Werth

$$y' x^{m-1} + (n-1) y x^{n-2}$$

ſubſtituirt, ſo wird man dieſe Gleichung der erſten Ordnung lineairiſch von y haben:

$$(n-1)x^{m-1} + y'x^m + mx^{m-1}y = y'x^{m-1} + (n-1)yx^{m-2},$$

welche auf folgende Form gebracht wird:

$$y' + \frac{n-1-mx}{x(1-x)} y = \frac{n-1}{x(1-x)}.$$

Da dieſe Gleichung der Methode von no. 67. fähig iſt, ſo könnte man den Werth von y in x finden, welcher folglich die Summe der vorgegebenen Reihe ſeyn wird. Aber dieſer Werth ſollte eine willkührlich beſtändige Größe enthalten, welche man dergeſtalt beſtimmen wird, daß $y = 1$ ſey, wenn $x = 0$, wie aus der gegebenen Reihe folget.

Wenn die Reihe nur einfache Faktoren enthalten hätte, wie

$$1 + \frac{m}{n} x + \frac{m+1}{n+1} x^2 + \frac{m+2}{n+2} x^3 + \&c.$$

ſo hätte man durch dieſelben Operationen gefunden:

$$p = \frac{n-1}{m-1} x^{m-1} + x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + \&$$

Aber man weiß, daß

$$1 + x + x^2 + \&c. = \frac{1}{1-x};$$

man hätte alſo in dieſem Falle:

$$p = \frac{n-1}{m-1} x^{m-1} + \frac{x^m}{1-x}.$$

Nimmt man die erſten Funktionen, und ſubſtituirt den Werth von p', ſo hat man:

$$y' x^{m-1} + (n-1) y x^{m-2} = (n-1) x^{m-2} + \frac{m x^{m-1}}{1-x} + \frac{x^m}{(1-x)^2},$$

nemlich

$$y' + \frac{(n-1)y}{x} = \frac{n-1}{x} + \frac{m}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2},$$

eine ebenfalls lineairiſche Gleichung von der erſten Ordnung.

Dieſe Methode iſt auch auf zuſammengeſetztere Reihen anwendbar, und kann zu lineairiſchen Gleichungen von höherer Ordnung als die erſte führen. Ich glaubte ſie wenigſtens anzeigen zu müſſen, da ſie faſt die einzige allgemeine Methode für die Summation der Reihen iſt.

78.

Es ſey jetzt die Gleichung

$$y = Ax + Bx^2 + x^3$$

vorgegeben, in der man den Ausdruck von x in y ſuchet. Dieſen Ausdruck kann man durch die bekannte Formel, für die Auflöſung der Gleichungen vom dritten Grad erhalten. Man kann durch die Theorie der Funktionen folgendergeſtalt dahin kommen.

Nimmt man die erſten und zweyten Funktionen, ſo hat man:

$$y' = A + 2Bx + 3x^2, \; y'' = 2B + 6x;$$

bilde ich also die Größe

$$y + (m + nx)y' + (p + qx + rx^2)y'',$$

wo m, n, p, q, r, willkührliche Coeffizienten sind, so werde ich ein Quatrinomium haben, welches die Potenzen x, x^2 und x^3 enthalten wird, und ich werde die durch jede dieser Potenzen multiplizirten Glieder können verschwinden lassen. Ich habe also eine Gleichung von der zweyten Ordnung von der Form:

$$y + (m + nx)y' + (p + qx + rx^2)\, y'' = C,$$

wo C eine beständige Größe seyn wird; und diese Gleichung wird noch zwey unbestimmte Coeffizienten enthalten.

Ich könnte also auch noch so machen, daß wenn man sie durch $2y'$ multiplizirt, sie eine ursprüngliche Funktion hat; denn da braucht man nur

$$q = 2m,\ r = n$$

zu machen, und die ursprüngliche Gleichung wird seyn:

$$y^2 + (p' + 2mx + nx^2)\, y'^2 = 2Cy + a.$$

a ist nemlich eine willkührliche beständige Größe, welche man, wie wir es gesagt haben, bestimmt, indem man $x = o$ und für y und y' ihre aus der vorgegebenen Gleichung gezogenen Werthe hinsetzet. Sie giebt in diesem Falle

$$y = o,\ y' = A;$$

macht man also diese Substitutionen in der vorhergehenden Gleichung, so giebt sie

$$2pA^2 = a.$$

Man wird also folgende Gleichung von y von der ersten Ordnung haben:

$$y^2 + (p + 2mx + nx^2)\, y'^2 = 2Cy + pA^2,$$

wo x nur bis zum zweytem Grade steigt; ohne diesen Umstand würde man nichts für die Bestimmung von x gewonnen haben.

Aber

Aber ehe wir weiter gehen müſſen, wir den nothwendigen Bedingungen genüge leiſten, damit die Größe

$$y + (m + nx)y' + (p + 2mx + nx^2)y'',$$

nach der Subſtitution der Werthe von y, y', y'', einer beſtändigen Größe C gleich werde. Dieſe Subſtitution giebt die Größe:

$$Ax = Bx^2 + x^3 + (m + nx)(A + 2Bx + 3x^2) + (p + 2mx + nx^2)(2B + bx).$$

Entwickelt und ordnet man die Glieder nach den Potenzen von x, und ſetzt man das Glied ohne $x = C$ und die andern Glieder gleich Null, ſo hat man:

$$mA + 2pB = C, (1 + n)A + 6mB + 6p = 0,$$
$$(1 + 4n)B + 15m = 0, 1 + 9n = 0,$$

woraus man erhält:

$$n = -\frac{1}{9}, m = -\frac{B}{27}, p = \frac{B^2 - 4A}{27} \text{ und}$$
$$C = \frac{2B^3 - 9AB}{27}.$$

Mehrerer Einfachheit wegen wollen wir die Größen p und C zurückbehalten, und die von m und n in der obigen Gleichung ſubſtituiren, ſo wird ſie, wenn man den Werth von y herausziehet, werden:

$$y' = \frac{3\sqrt{(pA^2 + 2Cy - y^3)}}{\sqrt{(9p - \frac{2B}{3}x - x^2)}}.$$

Man muß jetzt daraus die urſprünglichen Gleichungen von x und y ableiten; aber um die imaginairen Größen zu vermeiden, muß man zwey Fälle unterſcheiden, den einen, wo die Wurzelgrößen reel ſind, den andern, wo ſie immaginair ſind, denn weil ein jeder reele Werth von x für y und y' reele Werthe giebt, ſo iſt es ſichtbar, daß die zwey Wurzelgrößen der vorhergehenden Gleichung,

reel

reel und immaginair zugleich seyn werden. Wir wollen also erstens voraussetzen, daß

$$\sqrt{(pA^2 + 2Cy - y^2)}$$

eine reele Größe sey, es muß also seyn:

$$pA^2 + C^2 > (y - C)^2,$$

folglich wird man annehmen können

$$y - C = \sqrt{(pA^2 + C^2)} \sin. z,$$

welches geben wird:

$$\sqrt{(pA^2 + 2Cy - y^2)} = \sqrt{(pA^2 + C^2)} \cos. z,$$

und nimmt man die ersten Funktionen

$$y' = \sqrt{(pA^2 + C^2)}\, z' \cos. z \text{ (no. 32)};$$

setzt man ferner diese Werthe in die vorhergehende Gleichung, und dividirt mit 3, so wird sie:

$$(9p - \frac{2B}{3} x - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{z'}{3},$$

und man findet auf eben die Art, daß diese Gleichung folgende giebt, die man leicht erweisen kann:

$$x + \frac{B}{3} = \sqrt{(9p + \frac{B^2}{9})} \sin. (\frac{z}{3} + \alpha).$$

α ist eine willkührliche beständige Größe, welche man so bestimmen muß, daß $x = o$, $y = o$ giebt, der vorgegebenen Gleichung gemäß. Es sey a der Werth von z, wenn $y = o$, so wird man also die zwey Gleichungen haben:

$$-C = \sqrt{(pA^2 + C^2)} \sin. a$$

$$\text{und } \frac{B}{3} = \sqrt{(9p + \frac{B^2}{9})} \sin. (\frac{a}{3} + \alpha),$$

durch welche man sogleich a und nachher α, bestimmen wird. Nach diesem wird man z durch die Gleichung

$$\sin. z = \frac{y - C}{\sqrt{(pA^2 + C^2)}},$$

bestimmen, und man wird haben:

$$x =$$

$$x = -\frac{B}{3} + \sqrt{(9p + \frac{B}{9})}\sin.(\frac{z}{3} + \text{°}).$$

nd da zu einerley sinus von z auch der Winkel z, um ei- : oder zwey Peripherien vermehrt, gehört, ſo wird man e drey Werthe von x haben, indem man für z dieſe :ey Werthe z, z + c, z + 2c, nimmt, wo c den Um- ng des Kreiſes bezeichnet. Dieſes iſt der Fall, welchen an irreductibel nennt, und wo die drey Wurzel- :öße real ſind.

Wir wollen zweytens vorausſetzen, daß die Wurzel- röße

$$\sqrt{(pA^2 + C2y - y^2)}$$

nmäginair ſey, ſo braucht man nur den Zähler und den lenner des Ausdrucks von y′ durch $\sqrt{(-1)}$ zu mul- pliciren, und man hat,

$$y' = \frac{3\sqrt{(-pA^2 - 2Cy + y^2)}}{\sqrt{(-qp + \frac{2B}{3}x + x^2)}};$$

ine ganz reele Größe.

Ich bemerke, daß wenn man

$$X = \frac{B}{3} + x + \sqrt{(-9p + \frac{2B}{3}x + x^2)},$$

$$Y = -C + y + \sqrt{(-pA^2 - 2Cy + y^2)},$$

nacht und man die erſten Funktionen nimmt, und y mmer als eine Funktion von x betrachtet, man hat:

$$X' = X(-9p + \frac{2B}{3}x + x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$Y' = y'Y(-pA^2 - 2Cy + y^2)^{-\frac{1}{2}};$$

o daß man die vorhergehende Gleichung zu dieſer Form

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{3Y},$$

urückbringen kann, von welcher die zwey Glieder zur ur- ſprüng-

sprünglichen Funktion haben 1X und $\frac{1}{3}$1Y (no. 32). Man wird also diese ursprüngliche Gleichung haben:

$$1X = \tfrac{1}{3}1Y + 1b.$$

(b ist eine willkührliche beständige Größe); und geht man von den Logarithmen zu den Zahlen über, so wird man haben: $X = b\sqrt[3]{(Y)}$. Um b zu bestimmen, wird man von neuem $x = o$ und $y = o$ machen. X wird

$$\frac{B}{3} + \sqrt{-9p},$$

und Y wird

$$-C + \sqrt{-pA^2}.$$

Man hat also:

$$b = \frac{\frac{1}{3}B + \sqrt{-9p}}{-C + \sqrt{-pA^2}}.$$

Jetzt da wir den Werth von X in x haben, so kann man leichte x daraus ziehen; denn wenn man die Gleichung

$$\sqrt{(-9p + \frac{2B}{3}x + x^2)} = X - \frac{B}{3} + x,$$

quadrirt, so wird man daraus auf der Stelle

$$x = \frac{(X - \frac{1}{3}B)^2 + 9p}{2X},$$

ableiten, folglich, wenn man für X den in y gefundnen Werth, nemlich $b\sqrt[3]{(Y)}$ setzet, so hat man:

$$x = \frac{(b\sqrt[3]{Y} - \frac{1}{3}B)^2 + 9p}{2b\sqrt[3]{(Y)}}.$$

Dieser Ausdruck kann, wie man sieht, nur einen reellen Werth von x geben; es ist nemlich der Fall, wo die Gleichung zwey immaginaire Wurzelgrößen hat.

Macht man $B = o$, so vereinfachen sich die Formeln, welche man so eben in den beyden Fällen gefunden hat,

hat, ſehr, und werden zu den bekannten Formeln für die Auflöſung der Gleichung des dritten Grades, in welchen das zweyte Glied fehlt, zurückgebracht. Wir werden uns aber bey dieſem Probleme, das eigentlich zur Algebra gehört, nicht länger aufhalten, indem wir es nur im Vorbeygehen behandelt haben, um durch verſchiedne Anwendungen die Art zu zeigen, den Algorithmus der Funktionen zu gebrauchen.

79.

Als letztes Beyſpiel wollen wir die Gleichung von der erſten Ordnung nehmen:

$$y' = \frac{\sqrt{(A + By + Gy^2 + Dy^3 + Ey^4)}}{\sqrt{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4)}}.$$

Dividirte man ſie durch die Wurzelgröße in y, ſo hätte man eine Gleichung, wo die veränderlichen Größen x und y getrennt wären; aber auf dieſe Art wäre es unmöglich, die urſprüngliche Funktion zu erhalten, weil dieſe zwey Glieder nicht insbeſondere zu erſten Funktionen reductibel ſind. Demohngeachtet kann man hier vermittelſt der abgeleiteten Funktionen dahin kommen. Ich nehme zuerſt an, daß x und y Funktionen einer andern veränderlichen Größe t ſeyen. Deswegen ſetze man $\frac{y'}{x'}$ an die Stelle von y' (no. 63). x' und y' werden dann die erſten Funktionen von x und y die als Funktionen von t betrachtet ſind) ſeyn. Ich kann alſo vorausſetzen, daß x eine beliebige Funktion von t ſey, und die Gleichung wird mir für y eine beſtimmte Funktion von t geben; alſo kann ich annehmen, daß x eine ſolche Funktion von t ſey, die folgende Gleichung giebt.

$$x' = \sqrt{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4)}$$

Die

Die vorhergehende Gleichung, in welche man $\frac{y'}{x'}$ für
geſetzet hat, wird gleichfalls geben

$$y' = \sqrt{A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4}).$$

Man laſſe die Würzelgrößen in dieſen zwey Gleichun
verſchwinden, nachher nehme man die erſten Funktio
nachdem man die eine durch x', die andre durch y', t
dirt hat, ſo wird man haben:

$$2x'' = B + 2Gx + 3Dx^2 + 4Ex^3,$$
$$2y'' = B + 2Cy + 3Dy^2 + 4Ey^3,$$

Wir machen

$$x + y = p, \; x - y = q,$$

welches giebt

$$x = \frac{p + q}{2}, \; y = \frac{p - q}{2};$$

die zwey vorhergehenden Gleichungen addirt und ſubtra
geben

$$p'' = B + Cp + \frac{3D}{4}(p^2 + q^2) + \frac{E}{2}(p^3 + 3pq^2),$$

$$q'' = Cq + \frac{3D}{2}pq + \frac{E}{2}(3p^2q + q^3).$$

Noch mehr, da

$$p'q' = x'^2 - y'^2,$$

wenn man die aus den erſten Gleichungen gezogenen W
the von x' und y' ſubſtituirt, ſo hat man

$$p'q' = Bq + Cpq + \frac{D}{4}(3p^2q + q^3) + \frac{E}{2}(p^3q + p$$

Jetzt mache ich folgende Combination

$$qp'' - p'q' = \frac{D}{2} q^2 + Epq^2.$$

Wenn ich die beyden Glieder mit $\frac{2p'}{q^2}$ multiplicire, ſo werden ſie die erſten Funktionen von $\frac{p'^2}{q'}$ und von $Dp + Ep^2$; ſo daß ich ſogleich folgende urſprüngliche Gleichung von der erſten Ordnung haben werde

$$\frac{p'^2}{q^2} = Dp + Ep^2 + a,$$

wo a eine willkührliche beſtändige Größe iſt.

Um ſie zu beſtimmen, ſey m der Werth von y, wenn x = o, und man wird in dieſem Falle, durch die obigen Gleichungen haben:

$x' = \sqrt{A}, y' = \sqrt{(A + Bm + Cm^2 + Dm^3 + Em^4)}$, eine Größe, welche wir, der Kürze wegen, = n annehmen wollen.

Weil alſo

$p = x + y$, $q = x - y$, $p' = x' + y'$, $q' = x' - y'$, ſo wird man, wenn x = o, haben:

$p = m$, $q = -m$, $p' = \sqrt{A} + n$, $q' = \sqrt{A} - n$, Machet man dieſe Subſtitutionen in der eben gefundenen Gleichung, ſo hat man:

$$a = \frac{(\sqrt{A} + n)^2}{m^2} - Dm - Em^3,$$

wo man ſieht, daß weil m eine unbeſtimmte Größe iſt, die beſtändige Größe a auch unbeſtimmt bleibt. Aber die vorhergehenden Beſtimmungen wären nützlich, wenn man durch andre Combinirungen neue urſprüngliche Funktionen mit willkührlichen beſtändigen Größen fände.

Wir haben alſo die Gleichung

$$p' = q\sqrt{(a + Dp + Ep^2)},$$

welche, obgleich von der ersten Ordnung, dennoch die ursprüngliche Gleichung in x und y von der vorgegebenen Gleichung sogleich geben kann, da der Werth von p', welcher x' + y' ist, schon in x und y bekannt ist. Und wirklich, wenn man die Werthe von p, q und p' substituirt, so hat man:

$$\sqrt{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4)} + \sqrt{(A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4)} = (x - y)\sqrt{[a + D(x + y) + E(x + y)^2]},$$

wo a die willkührliche beständige Größe ist.

Diese Gleichung in x und y ist, wie man sieht, von einer ziemlich einfachen Form, und die Methode durch welche wir dahin gelanget sind, ist sehr merkwürdig; aber diese Gleichung ist nicht die einzige, welche man durch die so eben gefundenen Formeln erhalten kann.

In der That, wenn man den vorhergehenden Werth von p', in der oben gefundenen Gleichung, für den Werth von p'q' substituirt, so erhält man daraus:

$$q' = \frac{B + Cp + \frac{1}{4}(3p^2 + q^2) + \frac{3}{2}E(p^3 + pq^2)}{\sqrt{(a + Dp + Ep^2)}}.$$

Setzt man hier für q und p ihre Werthe x + y und x − y, und für q ihren Werth

$$x' - y' = \sqrt{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4)} - \sqrt{(A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4)}$$

wieder ein, so wird man eine neue Gleichung in x und y mit einer willkührlichen beständigen Größe a haben, welche ebenfalls die ursprüngliche Funktion der vorgegebenen Gleichung seyn wird. Wenn man nachher addirt oder subtrahirt, so wird man zwey andre Gleichungen haben, die in einigem Betrachte viel einfacher sind, und welche alle equivalent seyn werden.

80.

Die Gleichung von der erſten Ordnung, von der wir a eben die urſprüngliche Gleichung fanden, kann immer urch ſchickliche Umänderungen auf folgende Form gebracht werden:

$$z' = \frac{\sqrt{(A + B \cos. z)}}{\sqrt{(A + B \cos. u)}}.$$

z iſt hier eine Funktion von u. Da dieſe Gleichung, wenn ſie geradezu auf eben die Art behandelt wird, einer viel einfachern und elegantern Analyſe fähig iſt, ſo glaube ich, man wird nicht böſe ſeyn, ſie hier zu finden.

Man wird u und z als Funktionen einer andern veränderlichen Größe t anſehen; und nachdem man dieſem zufolge $\frac{z'}{u'}$ an die Stelle von z, ſubſtituirt hat (No. 43) ſo wird man folgende zwey für ſich beſtehende Gleichungen machen:

$u' = \sqrt{(A + B \cos. u)}$, $z' = \sqrt{(A + B \cos. z)}$;

nachdem man ſie quadrirt hat, wird man ihre erſten Funktionen nehmen, und man wird, wenn man die eine durch u' und die andre durch z' dividirt hat, dieſe beyden Gleichungen von der zweyten Ordnung haben:

$$2u'' = - B \sin. u,\ 2z'' = - B \sin. z.$$

Es ſey jetzt

$$z + u = 2p,\ z - u = 2q.$$

Die beyden vorhergehenden Gleichungen, addirt und ſubtrahirt, werden nach bekannten Theoremen

$$2p'' = - B \sin. p. \cos. q,\ 2q'' = - B \cos. p. \sin. q.$$

Es iſt ſo gleich ſichtbar, daß wenn man dieſe zwey Gleichungen addirt, nachdem man die erſte durch q' und die zweyte durch p' multiplicirt hat, ſo wird die

linke Seite die erste Funktion von 2 p′ q′, und die r
te Seite die erste Funktion von — B sin. p. sin q. r
den; so daß man gleich diese erste ursprüngliche Gleich
der ersten Ordnung hat:

$$2p'q' = -B \sin. p \sin. q + a.$$

a ist die willkührliche beständige Größe.

Um sie zu bestimmen, wollen wir annehmen u =
gebe z = m, man hat also in diesem Falle:

$u' = \sqrt{(A + B)}$, $z' = \sqrt{(A + B \cos. m)}$,

$p = q = \frac{m}{1}$, $p' = \frac{z' + u'}{2}$, $q' = \frac{z' - u'}{2}$; also

$$2p'q' = \frac{z'^2 - u'^2}{2} = \frac{B(\cos.m - 1)}{2},$$

$$\sin. p \sin. q = (\sin. \frac{m}{2})^2 = \frac{1 - \cos. m}{2},$$

so, daß man haben wird:

$$a = 2p'q' + B \sin. p \sin. q = 0.$$

Man wird also nur die Gleichung

$$2p'q' = -B \sin. p \sin. q$$

haben; woraus man schliessen kann, daß, da diese
sprüngliche Gleichung keine willkührliche beständige G
ße enthält, sie in den ursprünglichen Gleichungen, t
denen wir ausgegangen sind, begriffen seyn muß. M
hat wirlich:

$$2p'q' = \frac{z'^2 - u'^2}{2} = \frac{B}{2} (\cos. z - \cos. u),$$

welches durch die Substitutionen der Größen p und
auf — B sin. p. sin q. zurückgebracht wird; w.
Gleichung mit der so eben gefundenen identisch ist.

Wir wollen jetzt, mit dieser Gleichung von der
sten Ordnung, die zwey obigen Gleichungen von der zwey

Ordnung, dividiren, und man wird dieſe beyden Gleichungen erhalten:

$$\frac{p''}{p'q'} = \frac{\cos. q}{\sin. q}, \quad \frac{q''}{p'q'} = \frac{\cos. p}{\sin. p},$$

von welchen, die erſte durch q' und die zweyte durch p' multiplicirt folgende urſprüngliche Gleichungen geben werden:

$$lp' = l\sin. q + la, \quad lq' = l\sin. p + lb,$$

oder, wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen übergehet,

$$p' = a \sin. q \quad q' = b \sin. p.$$

a und b ſind willkührliche beſtändige Größen, welche man durch dieſelben Subſtitutionen wie oben beſtimmen wird. Daraus erhält man:

$$a = \frac{\sqrt{(A + B\cos. m)} + \sqrt{(A + B)}}{2\sin.\frac{m}{2}},$$

$$b = \frac{\sqrt{(A + B\cos. m)} - \sqrt{(A + B)}}{2\sin.\frac{m}{2}}$$

Eine jede dieſer beyden Gleichungen könnte eine urſprüngliche Gleichung in u und z durch die Subſtitution der Werthe von p, q, p', q', geben; mann hätte alſo:

$$\sqrt{(A + B\cos. z)} + \sqrt{(A + B\cos. u)} = 2a\sin.\frac{z-u}{2}$$

$$\sqrt{(A + B\cos. z)} + \sqrt{(A + B\cos. u)} = 2b\sin.\frac{z+u}{2}$$

Da die Werthe von a und b die unbeſtimmte Größe m in ſich faſſen, ſo kann ein jeder dieſer Werthe auch als insbeſondere unbeſtimmt angeſehen werden; alſo in einer jeden dieſer Gleichungen allein kann man a oder b als eine

ne willkührliche beständige Größe ansehen; aber wenn man eine beliebige Combination dieser Gleichungen machen wollte, so müßte man die Werthe von a und b, die man weiter oben gefunden hat, gebrauchen, und dann wäre die Größe m die einzige willkührliche beständige Größe.

Da aber diese Gleichungen aus Wurzelgrößen zusammengesetzt sind, so wird es dienlich seyn, noch eine andre ursprüngliche Gleichung, nach den beyden Gleichungen der ersten Ordnung, so man eben gefunden hat, zu suchen, nemlich

$$p' = a \sin. q, \quad q' = b \sin. p,$$

dividirt man nun eine durch die andre, so hat man

$$\frac{p'}{q'} = \frac{a \sin. q}{b \sin. p};$$

und multiplicirt man kreutzweise,

$$b p' \sin. p = a q' \sin. q,$$

woraus man sogleich die ursprüngliche Gleichung

$$b \cos. p = a \cos. q + c \text{ erhält.}$$

c ist eine neue willkührliche beständige Größe, welche man bestimmen muß. Macht man

$u = o$ und $z = m$, so hat man $p = q = \frac{m}{2}$;

also wird die vorhergehende Gleichung geben:

$$c = (b - a) \cos. \frac{m}{2} = - \frac{\sqrt{(A + B)} \cos. \frac{m}{2}}{\sin. \frac{m}{2}}$$

Substituirt man die Werthe von a, b, c, so wie die von

$$p = \frac{z + u}{2}, \text{ und } q = \frac{z - u}{2},$$

in der vorhergehenden Gleichung, und machet man

Reductionen der Sinus und Cosinus, ſo wird ſie dieſe ſehr einfache Form annehmen:

$$\cos.\frac{z}{2}.\cos.\frac{u}{2} + \sin.\frac{z}{2}.\sin.\frac{u}{2}.\frac{\sqrt{(A + B\cos. m)}}{\sqrt{(A + B)}} = \cos.\frac{m}{2}.$$

Dieſes iſt die urſprüngliche Gleichung der Vorgegebenen von der erſten Ordnung in u, z und z′ und der Winckel m iſt davon die willkührliche beſtändige Größe.

§1.

Man kann die Winkel

$$\frac{z}{2}, \frac{u}{2} \text{ und } \frac{m}{2}$$

als die drey Seiten eines ſphäriſchen Dreyecks anſehen; es iſt alsdann ſichtbar, daß in der vorhergehenden Gleichung die Größe

$$\frac{\sqrt{(A + B\cos. m)}}{\sqrt{(A + B)}}$$

der Cosinus des Winkels zwiſchen den Seiten $\frac{z}{2}$ und $\frac{u}{2}$ ſeyn wird, und folglich der Seite $\frac{m}{2}$ entgegengeſetzt, durch die bekannten Formeln der ſphäriſchen Trigonometrie, das iſt der Werth von z′, wenn u = o und z = m. Alſo wird dieſer Winkel zu gleicher Zeit mit der Seite $\frac{m}{2}$ beſtändig ſeyn, während daß die beyden andern Seiten veränderlich ſind.

Es ſey M dieſer beſtändige Winkel, man wird alſo haben:

$$\frac{\sqrt{(A + B \cos. m)}}{\sqrt{A + B)}} = \cos. M$$

woraus man erhält:

$$\frac{A}{B} = \frac{\cos. M^2 - \cos. m}{\sin. M^2} = 2\left(\frac{\sin. \frac{m}{2}}{\sin. M}\right)^2 - 1.$$

Wenn man dieſe Subſtitution in der vorgegebenen Gleichung in u, z und z' machet, und der Kürze wegen annimmt

$$\frac{\sin. M}{\sin. \frac{m}{2}} = \mu,$$

ſo wird ſie zu dieſer Form übergehen:

$$z' = \frac{\sqrt{[1 - \mu^2 (\sin. \frac{z}{2})^2]}}{\sqrt{[1 - \mu^2 (\sin. \frac{u}{2})^2]}},$$

von der die urſprüngliche Gleichung die Relation zwiſchen den Seiten $\frac{z}{2}$ und $\frac{u}{2}$ eines ſphäriſchen Dreyecks ſeyn wird, in welchem μ das Verhältniß der Sinus der Winkel zu den entgegengeſetzten Seiten ſeyn wird. Dieſes Verhältniß iſt bekanntlich für alle Winkel und deren entgegengeſetzte Seiten daſſelbe, ſo daß, wenn dieſes Verhältniß allein gegeben iſt, der Winkel oder die Seite für die willkührliche Größe bleiben wird.

Die Betrachtung des ſphäriſchen Dreyecks kann dazu dienen, leichter ſehen zu laſſen, wie dieſe urſprüngliche Gleichung der Gleichung von der erſten Ordnung genüge leiſtet. Dieſe Gleichung iſt

$$\cos. \frac{z}{2} \cos. \frac{u}{2} + \cos. M \sin. \frac{z}{2} \sin. \frac{u}{2} = \cos. \frac{m}{2}.$$

Wenn

Wenn man die ersten Funktionen nimmt, und z als Funktion von u und m ansiehet, und M als beständig, so hat man:

$$(\cos. M \cos. \frac{z}{2} \sin. \frac{u}{2} - \sin. \frac{z}{2} \cos. \frac{u}{2}) z'$$

$$+ \cos. M . \sin. \frac{z}{2} \cos. \frac{u}{2} - \cos. \frac{z}{2} \sin. \frac{u}{2} = 0.$$

Setzen wir an die Stelle von cos. M seinen aus derselben Gleichung gezogenen Werth, so wird folgende Gleichung kommen:

$$\frac{\cos. \frac{z}{2} \cos. \frac{m}{2} - \cos. \frac{u}{2}}{\sin. \frac{z}{2}} z' + \frac{\cos. \frac{u}{2} \cos. \frac{m}{2} - \cos. \frac{z}{2}}{\sin. \frac{u}{2}} = 0.$$

Jetzt, wenn in demselben sphärischen Dreyecke, von welchem $\frac{u}{2}$, $\frac{z}{2}$, $\frac{m}{2}$ die drey Seiten sind und M der der Seite $\frac{m}{2}$ entgegengesetzte Winkel ist, man durch V und Z die den Seiten $\frac{u}{2}$ und $\frac{z}{2}$ entgegengesetzten Winkel bezeichnet, wird man gleichfalls haben:

$$\cos. \frac{u}{2} = \cos. \frac{z}{2} \cos. \frac{m}{2} + \cos. V \sin. \frac{z}{2} \sin. \frac{m}{2} \text{ und}$$

$$\cos. \frac{z}{2} = \cos. \frac{u}{2} \cos. \frac{m}{2} - \cos. Z \sin. \frac{u}{2} \sin. \frac{m}{2}.$$

Ich gebe cos. Z das Zeichen —, weil ich den Winkel Z stumpf annehme. Mache ich also diese Substitutionen, und dividire die ganze Gleichung durch $\sin. \frac{m}{2}$, so wird sie

$$z' \cos. V - \cos. Z = 0,$$

werden, wodurch

$$z' = \frac{\cos. Z}{\cos. V}.$$

Aber durch die allgemeine Eigenſchaft der ſphäriſ
Dreyecke hat man:

$$\frac{\sin. V}{\sin. \frac{u}{2}} = \frac{\sin. Z}{\sin. \frac{z}{2}} = \frac{\sin. M}{\sin. \frac{m}{2}} = \mu;$$

alſo,

$$\sin. V = \mu \sin. \frac{u}{2}, \sin. Z = \mu \sin. \frac{z}{2},$$

und dadurch

$$\cos. V = \sqrt{[1 - \mu^2 (\sin. \frac{u}{2})^2]},$$

$$\cos. Z = \sqrt{[1 - \mu^2 (\sin. \frac{z}{2})^2]}.$$

Subſtituirt man dieſe Werthe, ſo wird man
Gleichung von der erſten Ordnung haben, welche wir
den, wollten.

Wenn der Winkel Z, welchen wir ſtumpf annahm
ſpitz iſt, wie der Winkel V, dann würde mann, ſ
der Gleichung

$$z' = \frac{\cos Z}{\cos. V},$$

dieſe hier haben:

$$z' + \frac{\cos. Z}{\cos. V} = 0,$$

welche nur durch das Zeichen von z' verſchieden
und von welcher die urſprüngliche Gleichung dieſelbe
wird.

82.

Hier iſt noch eine weſentliche Betrachtung über dieſe Arten von Gleichungen: wenn die Gleichung von No. 80 unter dieſe Form

$$\frac{z'}{\sqrt{(A + B\cos. z)}} = \frac{1}{\sqrt{(A + B\cos. u)}},$$

geſetzt iſt, und wir vorausſetzen, daß fu die urſprüngliche Funktion von

$$\frac{1}{\sqrt{A + B\cos. u)}}$$

ſey, ſo wird fz gleichfalls die urſprüngliche Funktion von

$$\frac{z'}{\sqrt{(A + B\cos. z)}}$$

ſeyn, wo z als eine Funktion von u angeſehn wird, von welcher z' die erſte Funktion iſt.

Wenn man alſo zu den urſprünglichen Funktionen wieder zurückgehet, ſo wird man auf der Stelle dieſe urſprüngliche Gleichung haben:

$$fz = fu + a,$$

wo a die willkührliche beſtändige Größe iſt.

Dieſe Gleichung müſte ſich alſo mit der, welche wir in der gemeldeten Nummer gefunden haben, und wo m die willkührliche beſtändige Größe iſt, decken; folglich kann ihre willkührliche beſtändige Größe nur eine Funktion der willkührlichen beſtändigen Größe m ſeyn. Es ſey alſo, $a = \Sigma m$, ſo hat man:

$$fz = fu + Fm;$$

m iſt aber der Werth von z, wenn $u = o$. Wir wollen um mehrerer Einfachheit willen vorausſetzen, daß die Funktion fu, ſo genommen iſt daß ſie Null ſey, wenn

$$\mu = \frac{\text{sin. M}}{\text{sin. m}} \text{ ist.}$$

Dadurch kann man leichte die Werthe der Se y, x, &c. der neuen Dreyecke, finden; denn, betra man die gleichschenklichten Dreyecke die durch dies wechselsweise aufgetragene Seite m(gemacht sind, werden die Perpendiculairen von ihrer Spitze die Gr linie in zwey gleiche Theile schneiden. Die rechtwink ten Dreyecke, welche durch diese Perpendiculairen durch die Seiten, welche den gemeinschaftlichen Wi M enthalten, gebildet werden, geben sogleich durch bekannte Analogie für die rechtwinklichte Dreyecke fol de Gleichungen:

$$\text{tang.} \frac{u + y}{2} = \text{cos. M tang. z,}$$

$$\text{tang.} \frac{x + z}{2} = \text{cos. M tang. y,}$$

und macht man u = m, damit das erste Dreyeck gle schenklicht sey, so wird man noch folgende Gleichung ben:

$$\text{tang.} \frac{z}{2} = \text{cos. M tang. m,}$$

man hat alsdann:

$$fz = 2fm, fy = 3fm, fx = 4fm, \text{ &c.}$$

Wir werden aber hier bemerken, daß diese Construct eben das für das sphärische Dreyeck ist, was die Constr tion des 29ten Problems der geometrischen Fragen in Arithmetik von Newton für die gradlinigten Dreyecke

In der That, wenn man die sphärischen Dreye deren Seiten, m, u, z, y, sind; geradlinigt macht, so v wandeln sich die Gleichungen hier oben in

$$z = 2m \text{ cos. M, } u + y = 2z \text{ cos. M, } x + z = 2y \text{ cos. M,}$$

Es iſt leicht zu beweiſen, daß alsdann die Funktion
u den Winkel, von welchem $\frac{u \sin. M}{m}$ der Sinus iſt, pro-
rtional wird, ſo daß wenn man die Seite m für den
nus des entgegengeſetzten Winkels M nimmt, man ha-
n wird:

$$z = \sin. 2M, \; y = \sin. 3M \text{ &c.}$$

§3.

Wir haben uns ein wenig bey den Eigenſchaften der
unktionen von der Form fu, aufgehalten, weil die
eometer ſich viel damit beſchäftiget haben, und dieſe
unktionen ſich in der Auflöſung mehrerer Probleme
igen.

Verlangt man z. B. die Bewegung eines Pendels,
elches auf eine beliebige Art ſchwinget. Man nenne γ
ie Länge des Pendels, φ der Winkel um welchem er
i einem beliebigen Augenblick von der lothrechten Linie
beweicht, α der größte Werth von φ und β der kleinſte
Werth, und die Schwere ſetze man der Einheit gleich;
rner mache man,

$$\sin. u = \sqrt{\left(\frac{\cos. \beta - \cos. \varphi}{\cos. \beta - \cos. \alpha}\right)},$$

$$\mu = \sqrt{\left(\frac{\cos. \beta^2 - \cos. \alpha^2}{(\cos. \beta + \cos. \alpha)^2 + \sin. \alpha^2}\right)},$$

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{2(\cos \beta + \cos. \alpha)}{(\cos. \beta + \cos. \alpha)^2 + \sin. \alpha^2}\right)},$$

wird man $\lambda \sqrt{\gamma} f u$, für den Ausdruck der Zeit haben,
m dem niedrigſten Punkt an, indem man wie oben
rausſetzet;

$$f' u = \frac{1}{\sqrt{(1 - \mu^2 \sin. u^2)}}.$$

Die

Die Winkelgeschwindigkeit der Umwälzung um die lothrechte Linie wird durch

$$\frac{\sqrt{2}\ \sin.\ \alpha\ \sin.\ \beta}{\sqrt{r\ .\ \sin.\ \varphi^2 + \sqrt{(\cos\ \alpha + \cos.\ \beta)}}},$$

ausgedrückt werden, und wird folglich Null, wenn der Pendel durch die lothrechte Linie gehen wird, in welchem Falle man $\beta = 0$ hat; dieses ist der Fall, der gewöhnlichen Schwingungen.

84.

Man kann dasjenige Verfahren, durch welches man die abgeleiteten Funktionen und Gleichungen findet, die recte Analysis nennen, weil es in der That nur auf directe Methoden gegründet ist, und nur Operationen gebraucht, welche man durch die Regeln, welche wir auseinander gesetzt haben, immer ausführen kann. Aber die Art, um von diesen Funktionen und Gleichungen zu denen zurückzukommen, von welchen sie abgeleitet werden können, und die man als ihre ursprünglichen ansehen kann, machet einen andern Theil der Analysis der Funktionen aus, welchen man die umgekehrte Analysis nennen kann, weil sie von denselben Methoden und Regeln abhängt, aber umgekehrt genommen, und welche sich nicht immer mit derselben Leichtigkeit und Erfolg anwenden lassen. Es ist mit diesen beyden Theilen der Analysis der Funktionen, wie mit denen der Arithmetik und der Algebra, welche zum Gegenstand die directen Operationen der Multiplikation, die Erhebung zu Potenzen, und die umgekehrten Operationen der Division und die Ausziehung der Wurzeln haben. Die Operationen der ersten Art, sind immer durch die bekannten Regeln möglich, und geben beständig genaue Resultate; die, der

zweyten

weyten Art, ſind es im Gegentheil nur in gewiſſen Fällen, zum wenigſten ſtrenge genommen, und in allen anderen Fällen können ſie nur Näherungsreſultate geben.

Die directe Analyſis der Funktionen iſt alſo in den Regeln enthalten, welche wir gegeben haben, um die abgeleiteten Funktionen zu finden, wenigſtens, was die Funktionen einer einzigen veränderlichen Größe anbetrift. Was die umgekehrte Analyſis betrifft, ſo hängt ſie von denſelben Regeln ab; aber die Schwierigkeit beſtehet in ihrer Anwendung auf verſchiedene Fälle.

Wir haben die bekannten Methoden für die vorzüglichſten Formen der Funktionen und Gleichungen angezeigt, und wir haben uns hauptſächlich Mühe gegeben, die allgemeinen Principien dieſer umgekehrten Analyſis recht zu beſtimmen.

Da unſre Abſicht nicht iſt, eine vollſtändige Abhandlung davon zu geben, ſo wollen wir hier weiter keine Details beyfügen; aber diejenigen, welche den Differenzialcalcul verſtehen, können nicht fehlen, die Gleichförmigkeit der Analyſis der Funktionen, mit dieſem Calcul, und die Uebereinſtimmung der directen und umgekehrten Analyſis, mit den beyden Theilen dieſes Calculs, welche man Differential- und Integral-Calcul nennet, zu bemerken. Alſo wird es ihnen leichte ſeyn, wenn ſie es für gut finden, die verſchiedne Methoden von Integrationen, ſo bis jetzt gefunden ſind, zu den Funktionen überzutragen. Wir werden weiter unten auf eine directe und ſtrenge Art dieſe Gleichförmigkeit beweiſen. Wir hätten ſogar da anfangen können und auf die Art gleich unſre Analyſis der Funktionen auf den Differenzialcalcul zurückführen können; aber der Weg, welchen wir genommen haben, hat uns der beſte geſchienen, um

werden, wodurch

$$z' = \frac{\cos. Z}{\cos. V},$$

Aber durch die allgemeine Eigenschaft der sphärischen Dreyecke hat man:

$$\frac{\sin. V}{\sin. \frac{u}{2}} = \frac{\sin. Z}{\sin. \frac{z}{2}} = \frac{\sin. M}{\sin. \frac{m}{2}} = \mu;$$

also,

$$\sin. V = \mu \sin. \frac{u}{2}, \sin. Z = \mu \sin. \frac{z}{2},$$

und dadurch

$$\cos. V = \sqrt{[1 - \mu^2 (\sin. \frac{u}{2})^2]},$$

$$\cos. Z = \sqrt{[1 - \mu^2 (\sin. \frac{z}{2})^2]}.$$

Substituirt man diese Werthe, so wird man die Gleichung von der ersten Ordnung haben, welche wir finden, wollten.

Wenn der Winkel Z, welchen wir stumpf annahmen, spitz ist, wie der Winkel V, dann würde mann, statt der Gleichung

$$z' = \frac{\cos Z}{\cos. V},$$

diese hier, haben:

$$z' + \frac{\cos. Z}{\cos. V} = 0,$$

welche nur durch das Zeichen von z' verschieden ist, und von welcher die ursprüngliche Gleichung dieselbe genommen wird.

82.

Hier iſt noch eine weſentliche Betrachtung über dieſe Arten von Gleichungen: wenn die Gleichung von No. 80 unter dieſe Form

$$\frac{z'}{\sqrt{(A + B \cos. z)}} = \frac{I}{\sqrt{(A + B \cos. u)}},$$

geſetzt iſt, und wir vorausſetzen, daß fu die urſprüngliche Funktion von

$$\frac{I}{\sqrt{A + B \cos. u)}}$$

ſey, ſo wird fz gleichfalls die urſprüngliche Funktion von

$$\frac{z'}{\sqrt{(A + B \cos. z)}}$$

ſeyn, wo z als eine Funktion von u angeſehn wird, von welcher z' die erſte Funktion iſt.

Wenn man alſo zu den urſprünglichen Funktionen wieder zurückgehet, ſo wird man auf der Stelle dieſe urſprüngliche Gleichung haben:

$$fz = fu + a,$$

wo a die willkührliche beſtändige Größe iſt.

Dieſe Gleichung müſte ſich alſo mit der, welche wir in der gemeldeten Nummer gefunden haben, und wo m die willkührliche beſtändige Größe iſt, decken; folglich kann ihre willkührliche beſtändige Größe nur eine Funktion der willkührlichen beſtändigen Größe m ſeyn. Es ſey alſo, $a = \Sigma m$, ſo hat man:

$$fz = fu + Fm;$$

m iſt aber der Werth von z, wenn $u = o$. Wir wollen um mehrerer Einfachheit willen vorausſetzen, daß die Funktion fu, ſo genommen iſt daß ſie Null ſey, wenn

wenn $u = o$. Man muß dann auch, wenn man $u = o$. macht, $z = m$ haben, folglich wird man haben $fm = Fm$; also wird die ursprüngliche Gleichung, so man eben gefunden hat,

$$fz = fu + fm,$$

werden, welcher folgende algebraische Relation genüge leisten wird:

$$\cos.\frac{z}{2}\cos.\frac{u}{2} + \sin.\frac{z}{2}\sin.\frac{u}{2}\sqrt{\left(\frac{A + B\cos.m}{A + B}\right)} = \cos.\frac{m}{2}.$$

Ob man nun gleich die algebraische Form der Funktionen fu, fz, fm, nicht finden kann, so kann man dennoch eine algebraische Relation zwischen drey Größen z, u, m, finden, so daß man haben wird:

$$fz = fu + fm.$$

Also auch, wenn man in der vorhergehenden Gleichung z in y und u in z verändert, so hat man:

$$\cos.\frac{y}{2}\cos.\frac{z}{2} + \sin.\frac{y}{2}\sin.\frac{z}{2}\sqrt{\left(\frac{A + B\cos.m}{A + B}\right)} = \cos.\frac{m}{2}, \text{ und } fy = fz + fm.$$

Und wenn man noch y in x, und z in y verändert, welches geben wird:

$$\cos.\frac{x}{2}\cos.\frac{y}{2} + \sin.\frac{x}{2}\sin.\frac{y}{2}\sqrt{\left(\frac{A + B\cos.m}{A + B}\right)} = \cos.\frac{m}{2},$$

so wird man ebenfalls

$$fx = fy + fm$$

haben; u. s. w.

Man wird also nach einander haben:

$$fz =$$

$fz = fu\ fm$, $fy = fu + 2fm$, $fx = fu + 3fm$, &c. und die Relationen zwischen y, u und m, und x, u und m; &c. wird man aus den vorhergehenden Relationen erhalten, wenn man erst z und nachher y daraus eliminirt, &c.

Man kann diese Theorie bey der allgemeinen Form der Gleichung, welche wir in no. 79. betrachtet haben, anwenden, und ähnliche Schlußfolgen daraus ziehen; wenn man aber wie in no. 81, die vorhergehenden Formeln auf sphärische Dreyecke bezieht, so entstehet daraus eine sehr zierliche Construktion, wie folget.

Aus den drey Seiten z, u, m sey ein sphärisches Dreyeck gemacht, um Brüche zu vermeiden, setze ich hier die Größen 2z, 2x, 2m, an die Stelle von z, u, m, in den Formeln der gemeldeten Nummer. Der Winkel zwischen u und m sey stumpf, der Winkel zwischen den beyden Seiten u und z bleibe beständig. Man trage nach einander die Seite m längst diesen nemlichen verlängerten Seiten, so daß eine Reihe von Dreyecken daraus entstehet, von denen ein jedes eine Seite mit dem vorhergehenden gemein habe, und welche alle dieselbe Seite m, und den gemeinschaftlichen Winkel *M*, welcher dieser Seite entgegengesetzt ist, haben: dann wird man, wenn die Seiten, welche diesen Winkel umschließen, nach einander für diese verschiedenen Dreyecke u und z, z und y, y und x &c. haben:

$fz = fu + fm$, $fy = fu + 2fm$, $fx = fu + 3fm$ &c.

wo fu die ursprüngliche Funktion der Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - \mu^2 \sin. u^2)}}$$ ist,

und so auch von andern ähnlichen Funktionen, wo

$\mu =$

$$\mu = \frac{\sin. M}{\sin. m} \text{ ist.}$$

Dadurch kann man leichte die Werthe der Seiten y, x, &c. der neuen Dreyecke, finden; denn, betrachtet man die gleichschenklichten Dreyecke die durch dieselbe wechselsweise aufgetragene Seite m(gemacht sind, so werden die Perpendiculairen von ihrer Spitze die Grundlinie in zwey gleiche Theile schneiden. Die rechtwinklichten Dreyecke, welche durch diese Perpendiculairen und durch die Seiten, welche den gemeinschaftlichen Winkel M enthalten, gebildet werden, geben sogleich durch die bekannte Analogie für die rechtwinklichte Dreyecke folgende Gleichungen:

$$\text{tang.} \frac{u + y}{2} = \cos. M \text{ tang. } z,$$

$$\text{tang.} \frac{x + z}{2} = \cos. M \text{ tang. } y,$$

und macht man u = m, damit das erste Dreyeck gleichschenklicht sey, so wird man noch folgende Gleichung haben:

$$\text{tang.} \frac{z}{2} = \cos. M \text{ tang. } m,$$

man hat alsdann:

$$fz = 2fm, fy = 3fm, fx = 4fm, \text{ &c.}$$

Wir werden aber hier bemerken, daß diese Construction, eben das für das sphärische Dreyeck ist, was die Construction des 29ten Problems der geometrischen Fragen in der Arithmetik von Newton für die gradlinigten Dreyecke ist.

In der That, wenn man die sphärischen Dreyecke, deren Seiten, m, u, z, y, sind; geradlinigt macht, so verwandeln sich die Gleichungen hier oben in

$$z = 2m \cos. M, \quad u + y = 2z \cos. M, \quad x + z = 2y \cos. M, \text{ &c.}$$

Es

Es iſt leicht zu beweiſen, daß alsdann die Funktion
u den Winkel, von welchem $\frac{u \sin. M}{m}$ der Sinus iſt, pro-
ortional wird, ſo daß wenn man die Seite m für den
inus des entgegengeſetzten Winkels M nimmt, man ha-
en wird:

$$z = \sin. 2M, \; y = \sin. 3M \text{ &c.}$$

§3.

Wir haben uns ein wenig bey den Eigenſchaften der
unktionen von der Form fu, aufgehalten, weil die
eometer ſich viel damit beſchäftiget haben, und dieſe
unktionen ſich in der Auflöſung mehrerer Probleme
igen.

Verlangt man z. B. die Bewegung eines Pendels,
elches auf eine beliebige Art ſchwinget. Man nenne y
e Länge des Pendels, φ der Winkel um welchem er
einem beliebigen Augenblick von der lothrechten Linie
weicht, α der größte Werth von φ und β der kleinſte
Werth, und die Schwere ſetze man der Einheit gleich;
rner mache man,

$$\sin. u = \sqrt{\left(\frac{\cos. \beta - \cos. \varphi}{\cos. \beta - \cos. \alpha}\right)},$$

$$\mu = \sqrt{\left(\frac{\cos. \beta^2 - \cos. \alpha^2}{(\cos. \beta + \cos. \alpha)^2 + \sin. \alpha^2}\right)},$$

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{2(\cos \beta + \cos. \alpha)}{(\cos. \beta + \cos. \alpha)^2 + \sin. \alpha^2}\right)},$$

wird man $\lambda \sqrt{r} fu$, für den Ausdruck der Zeit haben,
n dem niedrigſten Punkt an, indem man wie oben
rausſetzet;

$$f'u = \frac{1}{\sqrt{(1 - \mu^2 \sin. u^2)}}.$$

Die

Die Winkelgeſchwindigkeit der Umwälzung um die lothrechte Linie wird durch

$$\frac{\sqrt{2}\sin.\alpha\sin.\beta}{\sqrt{r}.\sin.\varphi^2+\sqrt{(\cos.\alpha+\cos.\beta)}},$$

ausgedrückt werden, und wird folglich Null, wenn der Pendel durch die lothrechte Linie gehen wird, in welchem Falle man $\beta = 0$ hat; dieſes iſt der Fall, der gewöhnlichen Schwingungen.

84.

Man kann dasjenige Verfahren, durch welches man die abgeleiteten Funktionen und Gleichungen findet, die recte Analyſis nennen, weil es in der That nur auf directe Methoden gegründet iſt, und nur Operationen gebraucht, welche man durch die Regeln, welche wir auseinander geſetzt haben, immer ausführen kann. Aber die Art, um von dieſen Funktionen und Gleichungen zu denen zurückzukommen, von welchen ſie abgeleitet werden können, und die man als ihre urſprünglichen anſehen kann, machet einen andern Theil der Analyſis der Funktionen aus, welchen man die umgekehrte Analyſis nennen kann, weil ſie von denſelben Methoden und Regeln abhängt, aber umgekehrt genommen, und welche ſich nicht immer mit derſelben Leichtigkeit und Erfolg anwenden laſſen. Es iſt mit dieſen beyden Theilen der Analyſis der Funktionen, wie mit denen der Arithmetik und der Algebra, welche zum Gegenſtand die directen Operationen der Multiplikation, die Erhebung zu Potenzen, und die umgekehrten Operationen der Diviſion und die Ausziehung der Wurzeln haben. Die Operationen der erſten Art, ſind immer durch die bekannten Regeln möglich, und geben beſtändig genaue Reſultate; die, der

zweyten

veyten Art, ſind es im Gegentheil nur in gewiſſen Fällen, zum wenigſten ſtrenge genommen, und in allen anren Fällen können ſie nur Näherungsreſultate geben.

Die directe Analyſis der Funktionen iſt alſo in den Regeln enthalten, welche wir gegeben haben, um die abgeleiteten Funktionen zu finden, wenigſtens, was die Funktionen einer einzigen veränderlichen Größe anbetrift. Was die umgekehrte Analyſis betrifft, ſo hängt ſie von denſelben Regeln ab; aber die Schwierigkeit beſtehet in ihrer Anwendung auf verſchiedene Fälle.

Wir haben die bekannten Methoden für die vorzüglichſten Formen der Funktionen und Gleichungen angezeigt, und wir haben uns hauptſächlich Mühe gegeben, die allgemeinen Principien dieſer umgekehrten Analyſis recht zu beſtimmen.

Da unſre Abſicht nicht iſt, eine vollſtändige Abhandlung davon zu geben, ſo wollen wir hier weiter keine Details beyfügen; aber diejenigen, welche den Differenialcalcul verſtehen, können nicht fehlen, die Gleichförmigkeit der Analyſis der Funktionen, mit dieſem Calcul, und die Uebereinſtimmung der directen und umgekehrten Analyſis, mit den beyden Theilen dieſes Calculs, welche man Differential- und Integral-Calcul nennet, zu bemerken. Alſo wird es ihnen leichte ſeyn, wenn ſie es für gut finden, die verſchiedne Methoden von Integrationen, ſo bis jetzt gefunden ſind, zu den Funktionen überzutragen. Wir werden weiter unten auf eine directe und ſtrenge Art dieſe Gleichförmigkeit beweiſen. Wir hätten ſogar da anfangen können und auf die Art ſogleich unſre Analyſis der Funktionen auf den Differenialcalcul zurückführen können; aber der Weg, welchen wir genommen haben, hat uns der beſte geſchienen, um

unser Vorhaben ausführen zu können, welches einzig darin bestehet, diesen Zweig der Analysis mit der Elementar-Analysis zu verbinden, ohne sie von irgend einer fremden Betrachtung abhängen zu lassen, oder selbst etwas davon zu entlehnen.

85.

Wir haben jetzt nur von den Funktionen einer einzigen veränderlichen Größe gehandelt; es ist nicht schwer, die Theorie dieser Funktionen auf die Funktionen von zwey oder mehrern veränderlichen Größen auszudehnen.

Es sey $f(x,y)$ eine beliebige Funktion von zwey veränderlichen Größen x und y, welche man als unabhängig eine von der andern ansieht. Wenn man in dieser Funktion zu gleicher Zeit $x + i$ an die Stelle von x, und $y + o$, an die Stelle von y setzet, (i und o sind zwey unbestimmte Größen) und man nachher die neue Funktion

$$f(x + i,\ y + o)$$

nach den steigenden Potenzen von i und o entwickelt, so ist es deutlich, daß das erste Glied, ohne i oder o, $f(x,y)$ seyn wird, und daß die andern, neue Funktionen von x und von y, nach einander durch i, o, i^2, io, o^2, i^3, &c. multiplizirt, seyn werden. Diese Funktionen entstehen aus der ursprünglichen Funktion $f(x, y)$, und das Gesetz dieser Ableitung soll bestimmt werden.

Um auf die einfacheste Art dahin zu gelangen, wird man bey der Voraussetzung anfangen, daß nur die veränderliche Größe x da wäre, welche $x + i$ würde, die veränderliche Größe y aber dieselbe bliebe. In diesem Falle, wenn man, wie man bis jetzt gethan hat, durch f', f'', f''', &c. die ersten, zweyten, dritten &c. Funktionen in Beziehung auf x allein bezeichnet, wird man haben:

$f(x +$

$$f(x+i,y)=f(x,y)+if'(x,y)+\frac{i^2}{2}f''(x,y)+\frac{i^3}{2\cdot 3}f'''(x,y)+\&c.$$

Wir wollen jetzt durchgehends $y+o$ an die Stelle von y ſetzen. Man hat

$$f(x+i,\ y+o)=f(x,\ y+o)+if'(x,\ y+o)+\frac{i^2}{2}f''(x,\ y+o)+\frac{i^3}{2\cdot 3}f'''(x,\ y+o)+\&c.$$

Wenn man jetzt durch f_1, f_{11}, f_{111} &c. die erſten, zweyten, dritten, &c. Funktionen in Beziehung auf y allein bezeichnet, ſo iſt es deutlich, daß die Funktion

$$f(x,\ y+o)$$

als eine Funktion von $y+o$ betrachtet, und unabhängig von x werden wird

$$f(x,y)+of_1(x,y)+\frac{o^2}{2}f_{11}(x,\ y)+\frac{o^3}{2\cdot 3}f_{111}(x,\ y)+\&c.$$

Eben ſo, wenn man immer vorausſetzet, daß die Striche unten an dem Buchſtaben f erſte, zweyte &c. Funktionen in Beziehung auf y, ſchon durch f', f'', &c. bezeichnete Funktionen bezeichnet, ſo hat man:

$$f'(x,y+o)=f'(x,y)+of_1'(x,y)+\frac{o^2}{2}f_{11}'(x,y)+\&c.$$

$$f''(x,y+o)=f''(x,y)+of_1''(x,y)+\frac{o^2}{2}f_{11}''(x,y)+\&c.$$

u. ſ. w.

Wenn man alſo dieſe Subſtitutionen macht, und die Glieder nach den Potenzen und Producten von i und o ordnet, ſo hat man:

$$f(x+i, y+o) = f(x,y) + if'(x,y) + of_{,}(x,y) + \frac{i^2}{2}f''(x,y) + io f_{,}'(x,y) + \frac{o^2}{2}f_{,,}(x,y) + \frac{i^2}{2.3}f'''(x,y) + \frac{i^2 o}{2}f_{,}''(x,y) + \frac{io^2}{2}f_{,,}'(x,y) + \frac{o^2}{2.3}f_{,,,}(x,y) + \&c.$$

wo die allgemeine Form der Glieder iſt

$$\frac{i^m o^n}{(1.2.3\ldots m)\ (1.2.3\ldots n)}\ f_m^m\ (x,y).$$

86.

In dem ſo eben befolgten Verfahren, um die Entwickelung von

$$f(x+i,\ y+o)$$

zu erhalten, haben wir durch die Subſtitution von $x+i$ ſtatt x in $f(x,y)$ angefangen, und wir haben nach i entwickelt, nachher haben wir in allen Gliedern dieſer Entwickelung $y+o$ für y geſetzt, und haben nachher nach o entwickelt. Es iſt aber ſichtbar, daß man identiſch daſſelbe Reſultat, haben würde, wenn man, durch die Subſtitution von $y+o$ für y und durch die Entwickelung nach o anfinge, und daß man nachher, dieſe Subſtitutionen von $x+i$ für x und die Entwickelung nach i macht. Auf dieſe Art hätte man gleich die erſten, zweyten &c. Funktionen in Beziehung auf y, nemlich $f_{,}(x,y)$, $f_{,}(x,y)$, &c. Nachgehens wird man von dieſen hier die erſten, zweyten Funktionen u. ſ. w. haben, die zufolge der eben feſtgeſetzten Bezeichnung, durch $f_{,}'(x,y)$, $f_{,}''(x,y)$, &c, $f_{,,}'(x,y)$, $f_{,,}''(x,y)$ &c. dargeſtellt werden; und man wird alſo dieſelbe Formel wie oben erhalten, wie es ſeyn ſoll. In dem erſten Verfahren erhält man die Funktion $f_{,}'(x,y)$, wenn man gleich die erſte Funktion von $f(x,y)$ in Beziehung auf x nimmt, welches $f'(x,y)$ giebt, und nachher die erſte Funktion von dieſer hier in Beziehung auf y; und im zweyten Verfahren erhält man dieſelbe Funktion, wenn man gleich die erſte

ſte Funktion von $f(x, y)$ in Beziehung auf y, welches
(x, y) giebt, nimmt, und nachher die erſte Funktion
on dieſer hier in Beziehung auf x. Daraus folget, daß
; einerley iſt, in welcher Ordnung die Operation vorge-
ommen wird, die nothwendig iſt, um von der urſprüng-
hen Funktion $f(x, y)$ zu der abgeleiteten Funktion $f'(x,$
überzugehen, und da man daſſelbe von den andern
unktionen, welche oben und unten an der Charakteriſtik
mit Strichen bezeichnet ſind, ſagen ſoll, ſo kann man
raus überhaupt ſchließen, daß die Operationen, welche
rch dieſe Striche angezeiget ſind, durchaus unter ſich
abhängig ſind, und daß ſie zu denſelben Reſultaten
hren, welche Ordnung man auch befolget, indem man
e erſten Funktionen in Beziehung auf x und auf
eine jede durch die obern oder untern Striche ange-
gt, nimmt. Man wird alſo z. B. ebenfalls den Werth
n $f''(x, y)$ haben, wenn man die zweyte Funktion von
x, y) in Beziehung auf x nimmt, und nachher die er-
: Funktion von dieſer hier in Beziehung auf y, oder
enn man gleich die erſte Funktion von $f(x, y)$ in Be-
hung auf y, und nachher die zweyte Funktion von die-
r hier in Beziehung auf x nimmt, oder auch, wenn
an die erſte Funktion von $f(x, y)$ in Beziehung auf x,
chher die erſte Funktion von dieſer in Beziehung auf
und endlich die erſte Funktion dieſer letztern in Bezie-
ung auf x, und eben ſo mit den andern.

87.

Es ſey z. B.,

$$f(x, y) = x\sqrt{(2xy + y^2)}$$

wird man die erſte Funktion, in Beziehung auf x haben:

$$f'(x, y) = \sqrt{(2xy + y^2)} + \frac{xy}{\sqrt{(2xy + y^2)}},$$

und ihre erste Funktion in Beziehung auf y wird seyn:

$$\frac{x^2 + xy}{\sqrt{(2xy + y^2)}} = f_1(x, y);$$

nachher wird die erste Funktion von $f'(x, y)$ in Beziehung auf y, seyn:

$$\frac{2x + y}{\sqrt{(2xy + y^2)}} + \frac{x^2 y}{(2xy + y^2)^{\frac{3}{2}}} = f_1'(x, y),$$

und die erste Funktion von $f_1(x, y)$ in Beziehung auf x wird seyn:

$$\frac{x + y}{\sqrt{(2xy + y^2)}} - \frac{(x^2 + xy)y}{(2xy + y^2)^{\frac{3}{2}}} = f_1'(x, y).$$

Obgleich diese beyden Ausdrücke von $f_1'(x, y)$ verschieden scheinen, so sind sie dennoch identisch, denn sie werden sich die eine sowohl als die andere auf

$$\frac{3x^2y + 3xy^2 + y^3}{(2xy + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

zurückführen lassen.

Nachher wenn man die erste Funktion von $f'(x, y)$ in Beziehung auf x, das heißt, die zweyte Funktion von $f(x, y)$ in Beziehung auf x, nimmt, so hat man:

$$f''(x,y) = \frac{2y}{\sqrt{(2xy+y^2)}} - \frac{xy^2}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3xy^2 + 2y^3}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

und nimmt man jetzt die erste Funktion von dieser hier in Beziehung auf y, so hat man nach den Reductionen

$$f_1''(x, y) = \frac{3x^2y^2 + 3xy^3}{(2xy + y^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Eben so, wenn man die erste Funktion von $f_1'(x, y)$ in Beziehung auf x nimmt, so wird man finden:

$$f_1''(x, y) = \frac{3x^2y^2 + 3xy^3}{(2xy + y^2)^{\frac{5}{2}}};$$

u. s. w.

88.

Hieraus folget, daß um gegebene Funktionen von x und y für abgeleitete Funktionen von einer und derſelben urſprünglichen Funktion nehmen zu können, ſie gewiſſen Bedingungen genüge leiſten müſſen.

Alſo, wenn

$$F(x, y) \text{ und } \varphi(x, y)$$

von x, y, gegebne Funktionen vorſtellen: ſo muß, damit man vorausſetzen kann, daß

$F(x, y) = f'(x, y)$, und $\varphi(x, y) = f_1(x, y)$, ſey, man haben:

$$f_1'(x, y) = F_1(x, y) = \varphi'(x, y).$$

Und überhaupt, damit man vorausſetzen kann

$$F(x, y) = f_n^m(x, y) \text{ und } \varphi(x, y) = f_q^p(x, y)$$

müßte man haben:

$$f_{n+q}^{m+p}(x, y) = F_q^p(x, y) = \varphi_n^m(x, y).$$

Zum Beyſpiel, wenn

$$F(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \varphi(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2},$$

ſo kann man vorausſetzen

$$F(x, y) = f'(x, y), \quad \varphi(x, y) = f_1(x, y);$$

denn man findet,

$$F_1(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \varphi'(x, y);$$

aber man kann nicht vorausſetzen

$$F(x, y) = f_1'(x, y), \text{ und } \varphi(x, y) = f'(x, y);$$

denn dann müßte

$$F'(x, y) = \varphi_1(x, y)$$

ſeyn, welches nicht iſt.

89.

Die Funktionen von zwey veränderlichen Größen erzeugen alſo in Beziehung einer jeden dieſer veränderlichen Größen verſchiedne Arten von abgeleiteten Funktionen. Da wir diejenigen abgeleiteten Funktionen, welche ſich auf eine der veränderlichen Größen x beziehen, durch die obern Striche, und durch die untern Striche diejenigen abgeleiteten Funktionen, welche ſich auf die andere veränderliche Größe y beziehen, unterſchieden haben, ſo werden wir, erſte, zweyte &c. Funktionen nach x oder y, diejenigen Funktionen nennen, welche durch die einzigen, obern oder untern Striche, bezeichnet ſind, und wir werden die zugleich oben und unten bezeichnete Funktionen nur primo erſte, ſecundo zweyten, primo zweyten u. ſ. w. nennen; indem wir den obern Strich zuerſt und den untern Strich zuletzt ausſprechen.

90.

Dem gemäß, was wir für die Funktionen einer einzigen veränderlichen Größe ausgeübt haben, wollen wir, wenn man z als eine Funktion von x und y anſieht, durch z', $z_,$, z'', $z_,'$, $z_{,,}$, &c. dieſe verſchiedne abgeleiteten Funktionen, bezeichnen, und bey dem Buchſtabe z dieſelben Striche anbringen, welche man bey der Caracteriſtik f der Funktion $f(x, y)$ anbringen würde und die, wie man annimmt, den Werth von z vorſtellt, und man wird dieſe Funktionen auf dieſelbe Art nennen.

Wenn alſo x, $x + i$, und y, $y + o$ wird, ſo wird die Größe z (Funktion von x, y,) werden (no. 85.)

$$z + iz' + iz_, + \frac{i^2}{2} z'' + ioz_,' + \frac{o^2}{2} z_{,,}$$

$$+ \frac{i^3}{2.3} z''' + \frac{i^2o}{2} z_,'' + \frac{io^2}{2} z_{,,}' + \frac{o^3}{2.3} z_{,,,} + \&c.;$$

das

s allgemeine Glied dieſer Reihe iſt, wie an den er-
ihnten Ort

$$\frac{i^m \Gamma^n}{(1.2.3...m)(1.2.3...n)} z^{m}_{n}.$$

91.

In Betreff der Art, wie man dieſe verſchiedne Funk-
nen findet, iſt es klar, daß man nur dieſelben Re-
ln, als die für die Funktionen einer einzigen veränder-
hen Größe, zu befolgen braucht; die obern Striche der
rakteriſtik zeigen die Ordnung der abgeleiteten Funk-
nen, in Beziehung auf x allein an; und die untern
triche zeigen die Ordnung der abgeleiteten Funktionen
Beziehung auf y allein an: wenn man alſo die erſten
nktionen von z nach x und y, nimmt, ſo wird man die
erthe von z' und z, haben; und daraus, wenn man
ch einmal die erſten Funktionen in Beziehung auf x
id auf y nimmt, wird man die abgeleiteten Funktionen
r zweyten Ordnung z'', z', $z_{,}$, haben; u. ſ. w.

Es iſt gut, wenn man hier bemerkt, daß für die
unktionen von zwey veränderlichen Größen es zwey ab-
leitete Funktionen der erſten Ordnung z' und z, drey von
r zweyten Ordnung z'', $z_{,}'$, $z_{,,}$, &c. giebt, ſo daß für
e Ordnung m^m eine Anzahl von $m+1$ abgeleiteten Funk-
nen ſeyn werden.

92.

Wenn die Funktion z nur durch eine Gleichung zwi-
ben x, y, z, gegeben wäre, ſo würde man erwägen,
aß, da dieſe Gleichung ſtatt haben ſoll, was auch die
Berthe von x und y ſeyn mögen, ſo daß, wenn man
ach dieſer Subſtitution die Potenzen und Producten von

i und o, entwickelt, die Glieder, welche durch ein und selbe Potenz oder Product von i und o, multiplizirt getrennte Gleichungen bilden müssen. Aber wir haben gesehen, daß in der Entwickelung einer Funktion von x y, die Glieder, die durch i multiplizirt sind, die erste Fu tion nach x geben, die, so durch o multiplizirt sind, g die erste nach y, die durch $\frac{i^2}{2}$ multiplizirt geben die zw Funktion nach x &c.

Hat man also eine beliebige Gleichung zwischen x, und sieht man z als eine Funktion von x und y, durch i Gleichung gegeben, an, so kann man, wenn man die schiedene von allen diesen Gliedern abgeleitete Funktio nimmt, eben so viele abgeleitete Gleichungen von vers dener Ordnung daraus ziehen, die man ebenfalls er zweyte &c. **Gleichungen** nach x oder y, primo erst secundo **ersten** u. s. w. **Gleichungen**, und überha **abgeleitete Gleichungen von der ersten L nung, von der zweyten Ordnung** &c. nennen

Diese Gleichungen dienen, die Werthe von z', $z_{,}$, z', $z_{,,}$, &c. zu finden. Wenn man also durch $F(x, y) = o$ die vorgegebene Gleichung für die Bestimmung z vorstellet und man nur durch

$$F'(x),\ F'(y),\ F'(z)$$

die ersten Funktionen von $F(x, y, z)$, in Beziehung x, y, z, welche man als von einander getrennt und als u hängige veränderliche Größen betrachtet, bezeichnet, so leicht, durch die festgesetzten Principien (no. 31.) für Funktionen einer einzigen veränderlichen Größe zu hen, daß

$$i[F'(x) + z'F'(z)]$$

as mit i behaftete Glied, und

$$o[F'(y) + z, F'(z)]$$

as mit o behaftete Glied in der Entwickelung von F(x, y, z) ſeyn wird, nachdem nemlich x + i und y + o att x und y ſubſtituirt iſt. z iſt als eine Funktion von und y angeſehen.

Alſo, wird

$$F'(x) + z' F'(z)$$

ie erſte Funktion in Beziehung auf x ſeyn, und

$$F'(y) + z, F'(z)$$

die erſte Funktion in Beziehung auf von $F(x, y, z)$ y ſeyn; ſo daß man folgende zwey erſteGleichungen haben wird.

$$F'(x) + z'F'(z) = o, \quad F'(y) + z, F'(z) = o;$$

woraus man erhält:

$$z' = -\frac{F'(x)}{F'(z)}, \quad z, = -\frac{F'(y)}{F'(z)}.$$

Hat man auf dieſe Art die Werthe von z' und z,, ſo wird man die von z'', z',, z,,, &c. daraus ableiten, wenn man von neuem die erſten Funktionen von dieſer hier in Beziehung auf x uud y nimmt; und ſo weiter.

93.

Man kann auch unmittelbar dieſe Theorie, zu der Theorie der Funktionen einer veränderlichen Größe zurückrufen, wenn man z als in x und y gegeben, und y als eine unbeſtimmte Funktion von x anſieht. Wenn man alſo z zuerſt als eine Funktion von x anſieht, ſo wird die erſte Funktion von $F(x, y, z)$, durch die Principien von no. 31. ſeyn:

$$F'(x) + y' F'(y) + z' F'(z);$$

aber da z als eine Funktion von x und y, und y als eine Funktion von x betrachtet iſt, ſo wird die erſte Funktion

tion von z durch $z' + y'z$, vorgestellt werden; setzet m dieſen Werth an die Stelle von z', ſo hat man:

$$F'(x) + z'F'(z) + y'[F'(y) + zF'(z)]$$

für die erſte Funktion von $F(x, y, z)$.

Hat man alſo die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0,$$

ſo wird man die erſte Gleichung haben

$$F'(x) + z'F'(z) + y'[F'(y) + zF'(z)] = 0.$$

Da aber y eine unbeſtimmte Funktion von x iſt, ſo mu die vorhergehende Gleichung ſtatt haben, was auch d Funktion von y' ſey; ſie muß ſich alſo in folgende zwe zerlegen,

$$F'(x) + z'F'(z) = 0, \quad F'(y) + zF'(z) = 0,$$

Man könnte auf dieſelbe Art die abgeleiteten Gl chungen höherer Ordnung finden.

94.

Weil die abgeleiteten Funktionen von zwey veränder lichen Größen ſich auf dieſelbe Art und durch dieſelbe Regeln bilden, indem man eine jede veränderliche Grö ße getrennt und nach einander betrachtet, ſo folget dar aus, daß alles das, was wir von den Funktionen eine einzigen veränderlichen Größe erwieſen haben, ſich eben falls auf die Funktionen zweyer veränderlichen Größe anwenden läßt.

Es wird alſo leicht ſeyn, die allgemeine Methode, welche wir für die Entwickelung in rationallen Reihen e ner jeden Funktion einer veränderlichen Größe gege ben haben, auf die Funktionen zweyer veränderliche Größen auszudehnen und ähnliche Reſultate daraus abzu leiten. (Man ſehe den zweyten Theil).

End

Endlich iſt es auch ſichtbar, daß man durch dieſelben Principien die Funktionen von drey oder einer größern Anzahl von veränderlichen Größen behandeln kann, weil man nur dieſelben Operationen für jede veränderliche Größe beſonders zu wiederholen braucht.

Wir werden uns alſo hier begnügen, die wichtigſten Betrachtungen über die Natur und den Gebrauch der abgeleiteten Funktionen und Gleichungen zwiſchen drey veränderlichen Größen darzuſtellen.

95.

Wir wollen überhaupt die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

betrachten; ſie giebt (no. 92) die beyden erſten Gleichungen

$$F'(x) + z' F'(z) = 0 \text{ und } F'(y) + z, F'(z) = 0,$$

welche daher zu gleicher Zeit wie die vorgegebene Gleichung ſtatt haben werden. Alſo wird eine beliebige Combination dieſer drey Gleichungen ebenfalls ſtatt haben, und wird mithin ſtatt der urſprünglichen Gleichung dienen können.

Es ſeyen a und b zwey beliebige beſtändige Größen die in der Funktion $F(y, y, z)$ enthalten ſind, dieſe beſtändigen Größen werden dieſelben in den abgeleiteten Funktionen

$$F'(x), \quad F'(y), \quad F'(z)$$

ſeyn; alſo wird man durch die drey Gleichungen, von denen hier die Rede iſt, dieſe beyden beſtändigen Größen eliminiren können, und die daraus entſtehende Gleichung wird eine Gleichung von der erſten Ordnung zwiſchen x, y, z, z' und z, ſeyn, welche zwey beſtändige Größen weniger, als die urſprüngliche Gleichung, enthalten wird.

Wenn

Wenn man alſo umgekehrt für die Beſtimmung v
in x und y nur eine Gleichung von der erſten Ordn
zwiſchen x, y, z, z′ und z, hat, ſo müßte die urſpr
liche Gleichung zwiſchen x, y, und z, zwey willkühr
beſtändige Größen enthalten.

Dieſes iſt mit dem, was wir in Beziehung auf
Funktionen einer einzigen veränderlichen Größe (no.
geſehen haben, analog. Aber wir haben auch (no.
geſehen, daß die willkührliche Größe, welche in der
ſprünglichen Gleichung ſich finden ſoll, nicht beſtändig
kann, und demnach durch die Eliminirung dieſelbe G
chung der erſten Ordnung geben kann. Daſſelbe k
alſo hier ſtatt haben, und man kann leicht begre
daß man doch noch dieſelbe Gleichung von der e
Ordnung, durch die Eliminirung der beyden willkührli
Größen a und b, obgleich ſie nicht beſtändig ſind, h
wird, wenn nur die beyden erſten Gleichungen, noch
derſelben Form, ſind.

Wir wollen bloß durch $F'(a)$ und $F'(b)$ die e
Funktionen von $F(x, y, z)$, in Beziehung auf die G
ßen a und b genommen, welche in dieſer letzten Funk
enthalten ſind, bezeichnen. Es iſt leicht durch die fe
ſetzten Principien zu ſehen, daß wenn a und b als Fu
tionen von x und y angeſehen werden, die
Funktion von $F(x, y, z)$ in Beziehung auf x verme
ſeyn müßte, wegen der zwey neuen veränderlichen G
ßen a und b um die Größe

$$a'F'(a) + b'F'(b),$$

und daß die erſte Funktion in Beziehung auf y, eben
um die Größe

$$a,F'(a) + b,F'(b)$$

vermehret ſeyn müßte.

Wir wollen $b = fa$ annehmen, ſo hat man $b' = f'a$ (no. 31) und folglich auch $b, = a, f'a$; alſo die Größen, die man den beyden erſten Funktionen beyfügen muß, werden ſeyn:

$a'[F'(a) + f'a \times F'(b)]$, und $a,[F'(a) + f'a \times F'(b)]$;

folglich werden ſie zu gleicher Zeit verſchwinden, wenn man a ſo nimmt, daß ſie der Gleichung

$$F'(a) + f'a \times F'(b) = 0$$

genüge leiſtet; die Funktion fa von a, die man für b genommen hat bleibt gänzlich willkührlich.

Hieraus folgen alſo dieſe wichtigen Concluſionen:

1tens: Daß die urſprüngliche Gleichung, welche überhaupt einer Gleichung der erſten Ordnung genüge leiſtet, eine willkührliche Funktion enthalten muß.

2tens: Daß, wenn man für eine von der erſten Ordnung gegebene Gleichung eine urſprüngliche Gleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

findet, welche zwey willkührliche beſtändige Größen a und b enthält, man nur $b = fa$ zu machen und a ſo zu nehmen braucht, daß ſie der Gleichung

$$F'(a) + f'a \times F'(b) = 0$$

genüge leiſtet; die durch fa bezeichnete Funktion wird die willkührliche Funktion ſeyn.

3tens: Daß, wenn man eine beliebige Gleichung zwiſchen x, y, z, welche eine gegebene Funktion enthält, hat, man eine Gleichung von der erſten Ordnung, wo dieſe Funktion ſich nicht mehr befindet, davon ableiten kann. In der That, wenn φp die Funktion iſt, die man verſchwinden laſſen will, (p iſt eine von x, y, z gegebene Funktion) ſo braucht man nur die beyden erſten Gleichungen nach x und nach y der vorgegebenen Gleichung zu nehmen, und man wird drey Gleichungen haben,

welche

welche φp und $\varphi' p$ in sich halten werden, durch $\varphi' p$ bezeichnet man die erste Funktion von φp in Beziehung auf p genommen. Wenn man daraus diese beyde Funktionen eliminirt, so entstehet eine Gleichung der ersten Ordnung, wo die Funktion φp sich nicht mehr befindet.

96.

Es sey z. B.

$$z - ax - by - c = 0$$

eine gegebene Gleichung; die beyden ersten Gleichungen werden dann seyn

$$z' - a = 0, \quad z_{,} - b = 0.$$

Eliminirt man a und b aus diesen drey Gleichungen, so wird man die Gleichung von der ersten Ordnung

$$z - xz' - yz_{,} - c = 0,$$

haben, von welcher

$$z - ax - by - c = 0$$

die ursprüngliche Gleichung seyn wird, wo a und b die beständigen willkührlichen Größen sind.
Wenn man jetzt

$$z - ax - by - c = F(x, y, z)$$

annimmt, so hat man:

$$F'(a) = -x, \quad F'(b) = -y.$$

Man macht also $b = fa$, so wird die Gleichung um a zu bestimmen seyn

$$-x - y f'a = 0;$$

woraus man erhält:

$$f'a = -\frac{x}{y};$$

welches giebt:

$$a = \phi\left(\frac{x}{y}\right).$$

ϕ bezeichnet die umgekehrte Funktion von f'. Also, da die

die Funktion f unbeſtimmt iſt, ſo wird es die Funktion ϕ auch ſeyn; alſo werden a und b zwey unbeſtimmte Funktionen von $\frac{x}{y}$ ſeyn, oder vielmehr, abhängig von einer und derſelben unbeſtimmten Funktion von $\frac{x}{y}$; und $b + \frac{ax}{y}$ wird folglich eine unbeſtimmte Funktion von $\frac{x}{y}$ ſeyn. Wird alſo dieſe Funktion nur durch $\phi\frac{x}{y}$ bezeichnet, ſo wird die urſprüngliche Gleichung werden:

$$z - y\phi\frac{x}{y} - c = 0.$$

Nimmt man die beyden erſten Gleichungen von dieſer hier, ſo hat man:

$$z' - y\phi' \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y} = 0, \text{ und } z, -\phi\frac{x}{y} + y\phi'\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y^2} = 0.$$

Eliminirt man aus den drey Gleichungen die beyden unbekannten $\phi\frac{x}{y}$ und $\phi'\frac{x}{y}$, ſo hat man, wie oben,

$$z - xz' - yz, - c = 0,$$

für die abgeleitete Gleichung der erſten Ordnung, von der Funktion $\phi\frac{x}{y}$ befreyet.

97.

Dieſe Eigenſchaft der erſten Gleichungen, welche dazu dienen kann, eine beliebige Funktion verſchwinden zu laſſen, iſt in vielen Fällen ſehr nützlich, und vorzüglich bey den Entwickelungen in einer Reihe.

Um ein Beyſpiel zu geben, ſey die Gleichung

$$z = x + yfz$$

für die Beſtimmung von z vorgegeben, und fz eine l
bige Funktion von z. Wir wollen annehmen, daß
den Werth von z in einer Reihe nach den Potenzen
y verlangte, ſo iſt es ſichtbar, daß die beyden e
Glieder $x + yfx$ ſeyn werden; und wenn, um die
genden Glieder zu finden, man

$$z = x + yfx + Ay^2 + By^3 + \&c.$$

annehme, ſo müßte man die Funktion fz nach den
renzen von y entwickeln, und nachher die Glieder ver
chen, um die Werthe A, B, &c. beſtimmen zu kön
aber man würde auf dieſe Art nicht das Geſetz d
Werthe haben. Es wäre alſo vortheilhaft, wenn
ſtatt der vorgegebenen Gleichung, eine Gleichung von
erſten Ordnung, gebrauchte, wo die Funktion fz ſich
befindete.

Wenn man alſo die erſten Gleichungen nach x
nach y nimmt, ſo wird man haben:

$z' = 1 + yf'z.z'$, und $z, = fz + yf'z.z,$.

Man bezeichnet durch $f'z$ die erſte Funktion von f
Beziehung auf z. Eliminirt man $f'z$, ſo hat man ſog

$$z, - z'fz = 0.$$

Aber die urſprüngliche Gleichung giebt

$$fz = \frac{z - x}{y}.$$

Wenn man alſo dieſen Werth in der letzten Gleich
ſubſtituirt, ſo wird man folgende Gleichung von der
ſten Ordnung von fz befreyet haben:

$$z'(z - x) - yz, = 0.$$

Da das erſte Glied des Ausdrucks von z in der R
von y augenſcheinlich x iſt, ſo wollen wir im allge
nen annehmen:

$$z = x + Ay + By^2 + Cy^3 + \&c.$$

A, B, C, u. s. w. sind Funktionen von x. Wir haben also

$$z' = 1 + A'y + B'y^2 + C'y^3 + \&c.$$

A', B', &c. sind die erste Funktionen von A, B, &c., und als Funktionen von x angesehn.

Ferner

$$z_{,} = A + 2By + 3Cy^2 + 4Dy^3 + \&c.$$

Wenn man also diese Werthe substituirt, so erhält man:

$$(1 + A'y + B'y^2 + C'y^3 + \&c.)\ (A + By + Cy^2 + \&c.)$$
$$- A - 2By - 3Cy^2 - \&c. = 0:$$

nehmlich

$$(AA' - B)\, y + (BA' + AB' - 2C)\, y^2$$
$$+ (CA' + BB' + AC' - 3D)y^3 + \&c. = 0;$$

woraus man sogleich erhält:

$$B = AA';\ C = \frac{1}{2}(AB' + BA'),$$

$$D = \frac{1}{3}(AC' + BB' + CA'),\ \&c.$$

Hier bleibt die Größe A unbestimmt. Wir haben aber schon gesehen, daß die beyden ersten Glieder von z in der vorgegebenen Gleichung $x + yfx$ sind, folglich wird man haben:

$A = fx$; und dadurch $A' = f'x$; $B = fx\, f'x$,

$$B' = fx\, f''x + (f'x)^2;\ \text{also}$$

$$C = \frac{1}{2}(2fx\, f'x^2 + fx^2 \,.\, f''x),\ \&c.$$

Untersucht man aber die Ausdrücke von B, C, &c. so siehet man gleich, daß man sie unter folgende Form setzen kann:

$$B = \left(\frac{A^2}{2}\right)';\ C = \frac{1}{2}(AB)';$$

$$D = \frac{1}{3}(AC + \frac{1}{2}B^2)',\ E = \frac{1}{4}(AD + BC'),\ \&c.$$

indem man überhaupt, durch das Zeichen $(\,)'$ die erste

ste Funktion nach x, von der Größe, so in diesen beyden Haakens enthalten ist, bezeichnet. Macht man die nach einander folgenden Substitutionen, so findet man, daß diese Ausdrücke sich auf folgende weit einfachern reduciren:

$$B = \frac{1}{2}(A^2)', \quad C = \frac{1}{2.3}(A^3)'', \quad D = \frac{1}{2.3.4}(A^4)''', \text{ \&c.}$$

Man bezeichnet hier durch einen, zwey &c. Striche die ersten, zweyten &c. Funktionen der Größen, welche zwischen den Haakens enthalten sind, in Beziehung auf die veränderliche Größe x; so, daß wenn man den Werth von A substituirt, man endlich hat:

$$z = x + yfx + \frac{y^2}{2}(fx^2)' + \frac{y^3}{2.3}(fx^3)'' + \frac{y^4}{2.3.4}(fx^4)''' + \text{\&c.}$$

98.

Wir wollen jetzt voraussetzen, daß man den Werth einer beliebigen Funktion φz von z, ebenfalls nach den Potenzen von y entwickelt, verlangte. Man mache dann $u = \varphi z$, und wenn man die ersten Gleichungen nimmt, um die Funktion φ verschwinden zu lassen, so wird man haben:

$$u' = \phi' z \cdot z', \text{ und } u = \phi' z \cdot z,$$

woraus man erhält:

$$\frac{u'}{u_{,}} = \frac{z'}{z_{,}}.$$

Substituirt man den Werth von $\frac{z'}{z_{,}}$, der aus der Gleichung

$$z'(z - x) - yz, = o$$

der vorhergehenden Nummer gezogen ist, so hat man folgende Gleichung von der ersten Ordnung

$$u'(z - x) - yu, = o.$$

Wir

Wir wollen hier annehmen

$$u = P + Qy + Ry^2 + Sy^3 + \&c.,$$

P, Q, R, &c. ſind Funktionen von x. Subſtituirt man dieſen Werth, ſo wie den oben gefunden von z, ſo wird man haben:

$$(P' + Q'y + R'y^2 + S'y^3 + \&c.)\,(fx + \frac{y}{2}(fx^2)' + \frac{y^2}{2.3}(fx^3)'' + \&c.) - Q - 2Ry - 3Sy^2 - \&c. = 0;$$

woraus man erhält:

$$Q = P'fx,\quad 2R = Q'fx + \frac{P'}{2}(fx^2)',\quad 3S = R'fx + \frac{Q'}{2}(fx^2)' + \frac{P'}{2.3}(fx^3)'';$$

und ſo weiter.

Wenn man nun nach einander die Werthe von Q, R, &c. ſubſtituirt, ſo kann man leicht wieder erkennen, daß die Ausdrücke dieſer Größen zu folgender einfachen Form gebracht werden können:

$$Q = P'fx,\quad R = \frac{1}{2}(P'fx^2)',\quad S = \frac{1}{2.3}(P'fx^3)''\ \&c.$$

Die Funktion P bleibt unbeſtimmt, wegen der Eliminirung der Funktion φ; aber weil

$$u = \varphi z = \varphi(x + yfx + \&c.),$$

ſo iſt es ſichtbar, daß man $P = \varphi x$ haben wird, und folglich $P' = \varphi' x$.

Endlich wird man alſo haben:

$$\varphi z = \varphi x + y\varphi' x fx + \frac{y^2}{2}(\varphi' x fx^2)' + \frac{y^3}{2.3}(\varphi' x fx^3)'' + \&c.$$

eine ſehr merkwürdige Formel, und von einem großen Nutzen in der Analyſis, vorzüglich für die Rückkehr der Reihen.

99.

Man könnte unmittelbar zu diesem letzten Resultate durch die Formel von no. 45. kommen. Denn man brauchte nur u als eine Funktion von y ansehn, und die ersten zweyten &c. Funktionen von u in Beziehung auf y zu suchen, das heißt, die Werthe von $u_,$, $u_{,,}$, &c. Machte man hernach $y = o$, so hätte man

$$u, \; u_,, \; \frac{1}{2} u_{,,}, \; \frac{1}{2.3} u_{,,,}, \text{ &c.}$$

für die Coeffizienten P, Q, R, S, &c. der Reihe.

Alles kommt also darauf an, daß man diese abgeleiteten Funktionen findet und sie unter eine einfache aber regulaire Form bringet. Darum wollen wir die zwey ersten Gleichungen, die wir oben (no. 97, 98) gefunden haben, wieder vornehmen:

$$z, - z'fz = o, \text{ und } \frac{u'}{u,} = \frac{z'}{z,}.$$

Hieraus folget:

$$u, = u'fz, \text{ und } z = z'fz.$$

Man hat also 1tens

$$u, = u'fz:$$

2tens, wenn man die ersten Funktionen nach y nimmt,

$$u_{,,} = u''fz + u' z, f'z.$$

$f'z$ bezeichnet die erste Funktion von z in Beziehung auf z. Von der erstern Gleichung erhält man auch diese erste Gleichung, in Beziehung auf x:

$$u,' = u''fz + u'z'f'z.$$

Wenn man also substituiret, so hat man

$$u_{,,} = u''fz^2 + 2u'z'fzfz = (u'fz^2)';$$

3tens. Wenn man nochmal die ersten Funktionen in Beziehung auf y nimmt, so hat man:

$u_{,,,} =$

$u_{,,} = (u'fz^2)_{,}'$; alſo $(u'fz^2)_{,} = u_{,}'fz^2 + 2u'z_{,}f'zfz$.
Subſtituirt man die Werthe von $u_{,}'$, und von $z_{,}$, welche oben gegeben ſind, ſo hat man;

$$(u'fz^2)_{,} = u''fz^3 + 2u'z'f'zfz^2 = (u'fz^3)'.$$

Wenn man alſo die erſten Funktionen in Beziehung auf x nimmt, ſo hat man:

$$(u'fz^2)_{,}' = (u'fz^3)'' = u_{,,,}$$

u. ſ. w.

Weil alſo $u = \varphi z$, ſo hat man $u' = z'\varphi'z$, folglich $u_{,} = z'\varphi'zfz$, $u_{,,} = (z'\varphi'zfz^2)'$, $u_{,,,} = (z'\varphi'zfz^3)''$, &c. $\varphi'z$ iſt die erſte Funktion von φz in Beziehung auf z allein.

Wenn wir jetzt $y = 0$ machen, ſo wird die vorgegebene Gleichung,

$$z = x + yfz,$$

geben $z = x$; alſo

$$z' = 1,\ \varphi z = \varphi x,\ \varphi'z = \varphi'x,\ \text{und}\ fz = fx;$$

mithin

$$P = \varphi x,\ Q = \varphi' xfx,\ R = \frac{1}{2}(\varphi' xfx^2)',$$

$$S = \frac{1}{2.3}(\varphi' xfx^3)'', \text{ &c.}$$

Um durch eine Anwendung den Gebrauch dieſer Formel zu zeigen, ſey die Gleichung

$$z = x + yz^m$$

vorgegeben, x und y gegebene Größen, und man verlange den Werth von z^n in einer Reihe, nach den Potenzen von y, ſo mache man:

$$fz = z^m,\ \varphi z = z^n;$$

alſo auch

$$fx = x^m,\ \varphi x = x^n,\ \varphi' x = nx^{n-1};$$

und man hat auf der Stelle:

$$P=x^n,\ Q=nx^{m+n-1},\ R=\frac{n}{2}(x^{2m+n-1})'=\frac{n(2m+n-1)}{2}x^{2m+n-2},\ S=\frac{n}{2.3}(x^{3m+n-1})''=\frac{n(3m+n-1)(3m+n-2)}{2.3}x^{3m+n-3},\ \&c.$$

so daß man haben wird:

$$z^n=x^n+nx^{m+n-1}y+\frac{n(2m+n-1)}{2}x^{2m+n-2}y^2+\frac{n(3m+n-1)(3m+n-2)}{2.3}x^{3m+n-3}y^3+\&c.$$

100.

Wir haben gesehen, wie man eine jede willkührliche Funktion, welche in einer gegebenen Funktion enthalten ist, durch ihre ersten Gleichungen kann verschwinden lassen; aber es ist noch ein in einigem Betrachte einfacheres Mittel da, um dahin gelangen zu können, welches auf der Betrachtung, welche wir oben (no. 93) in Anwendung gebracht haben, gegründet ist.

Wir wollen im allgemeinen die Gleichung

$$F(x, y, z, \phi p) = 0,$$

in welcher p gleich $f(x, y, z)$, sey, betrachten. Sind die beyden Funktionen, welche durch die Caraktere F und f bezeichnet sind, gegeben sind, und da die Funktion die durch den Carakter ϕ bezeichnet ist, willkührlich so kann man y als eine Funktion von x annehmen, daß die erste Funktion von p Null ist; dann kann p eine beständige Größe in der Funktion

$$F(x, y, z, \phi p)$$

behandelt werden; wenn man nur y' durch die Be

gung beſtimmt, daß die erſte Funktion von $f(x, y, z)$ Null ſey.

Wir wollen nur durch

$$F'(x),\quad F'(y),\quad F(z),$$

und eben ſo durch

$$f'(x),\quad f'(y),\quad f'(z),$$

die erſten Funktionen von

$$F(x, y, z, \varphi p,) \text{ und von } f(x, y, z),$$

in Beziehung auf x, y. z iſolirt genommen, bezeichnen, und ſie als unabhängig anſehen, ſo wird man, wie an dem erwähnten Orte, die zwey erſten Gleichungen haben:

$$F'(x) + z'\,F'(z) + y'\,[F'(y) + z, F'(z)] = o,$$
$$f'(x) + z'\,f'(z) + y'\,[f'(y) + z, f'(z)] = o,$$

von welchen die erſte φp, und die zweyte nicht p enthalten wird. Dieſe hier wird dazu dienen, die unbekannte Größe y' zu eliminiren; und man wird zwey Gleichungen haben, welche φp enthalten werden, und durch welche man dieſe unbekannte Größe wird eliminiren können.

Dieſe Methode hat den Vortheil, daß man ſie auf Gleichungen, die mehrere willkührliche Funktionen von derſelben Funktion p enthalten, anwenden kann.

Wirklich, wenn man die Gleichung

$$F(x, y, z, \varphi p, \psi p) = o$$

hätte, ſo würde man gleich, wie oben, eine Gleichung von der erſten Ordnung ohne die Funktion φp finden, welche aber noch die Funktion ψp enthalten würde; nachher, wenn man bey dieſer Gleichung daſſelbe Verfahren anwendete und von neuem die Funktion y', die in ihrer erſten Gleichung durch dieſelbe obige Gleichung erſcheinen

wird, eliminirt, so wird man eine Gleichung von der zweyten Ordnung haben, welche Ψp enthalten wird, und wodurch man diese Funktion, durch Hülfe der Gleichung von der ersten Ordnung, eliminiren wird; und so weiter, welches auch immer die Anzahl der willkührlichen Funktionen der nemlichen Größe p seyn mag.

Wenn aber die vorgegebene Gleichung die Funktionen Φp und Ψq enthielte (p und q sind verschiedne Funktionen von x, y, z,) so könnte man nicht zu einer Gleichung von der zweyten Ordnung, welche von den Funktionen φp und Ψp und ihren abgeleiteten befreyet ist, kommen; man müßte alsdann zu Gleichungen höherer Ordnung übergehen.

101.

Wir wollen die Gleichungen von der ersten Ordnung, die aus der Eliminirung einer willkührlichen Funktion φp hervorgehen könnten, betrachten, und wollen mehrerer Einfachheit wegen annehmen, (was immer möglich ist) daß die ursprüngliche Gleichung von folgender Form sey:

$$F(x, y, z) = \varphi p, \ (p \text{ ist} = f(x, y, z)],$$

man wird alsdann folgende zwey erste Gleichungen haben:

$$F'(x) + z'F'(z) + y'[F'(y) + z_1F'(z)] = 0,$$
$$f'(x) + z'f'(z) + y'[f'(y) + z_1f'(z)] = 0,$$

welche von fp befreyt seyn werden; und man wird nur noch y' zu eliminiren haben.

Das

Das Reſultat dieſer Eliminirung iſt

$$\frac{F'(x) + z'F'(z)}{f'(x) + zf'(z)} = \frac{F'(y) + z_{,}F'(z)}{f'(y) + z_{,}f'(z)};$$

woraus dieſe Gleichung der erſten Ordnung folget:

$$F'(x).f'(y) - F'(y).f'(x) + z'[F'(z).f'(y) - F'(y).f'(z)] + z_{,}[F'(x).f'(z) - F'(z).f'(x)] = 0,$$

welche nur x, y, z mit den erſten Funktionen z′ und $z_{,}$ enthält.

Dieſe Gleichung wird alſo unter dieſe Form geſetzt werden können:

$$z' + Mz_{,} + N = 0,$$

indem man ſetzt

$$M = \frac{F'(x).f'(z) - F'(z).f'(x)}{F'(z).f'(y) - F'(y).f'(z)},$$

$$N = \frac{F'(x).f'(y) - F'(y).f'(x)}{F'(z).f'(y) - F'(y).f'(z)};$$

woraus man ſchließen kann:

1tens: Daß alle Gleichungen der erſten Ordnung zwiſchen x, y, z, z′ und z, welche nicht auf die vorhergehende Form reductibel ſind, nicht von einer urſprünglichen Gleichung zwiſchen x, y, z und φp, abgeleitet ſeyn können, wo p eine Funktion von x, y, z iſt.

2tens: Daß alle Gleichungen von der erſten Ordnung die auf die vorhergehenden Form reductibel ſind, immer, zur urſprünglichen Gleichung eine Gleichung der vorausgeſetzten Form

$$F(x, y, z) = \varphi p$$

haben können, wo p gleich $f(x, y, z)$ iſt.

Denn

Denn da die Werthe der Coeffizienten M und N als Funktionen von x, y, z gegeben ſind, ſo wird man zwey Gleichungen haben, durch welche man die beyden Funktionen, welche durch die Caraktere F und f bezeichnet ſind, beſtimmen kann; und die durch φ bezeichnete Funktion, wird willkührlich bleiben.

Da dieſes Problem eins der intereſſanteſten in der Theorie der Funktionen iſt, ſo will ich hier davon eine directe Auflöſung geben.

102.

Wenn man von neuem y und z als Funktionen von x anſieht, von denen die erſten Funktionen y' und z' ſind, und wenn man die zwey Größen

$$z' + N \text{ und } Mz' + Ny'$$

in Betrachtung ziehet, ſo werden dieſe Größen, durch die Subſtitution der beyden vorhergehenden Ausdrücke: von M und N, werden:

$$\frac{f'(y)\,[F'(z)z' + F'(x)] - F'(y)\,[f'(z)z' + f'(x)]}{F'(z).f'(y) - F'(y).f'(z)},$$

$$\frac{F'(x)\,[f'(z)z' + f'(y)y'] - f'(x)\,[F'(z)z' + F'(y)y']}{F'(z).f'y - F'(y).f'(z)}$$

Wenn man zu gleicher Zeit bey dem Zähler der erſteren die Größe

$$F'(y)'.f'(y)y',$$

und bey dem Zähler der zweyten die Größe

$$F'(x) + f'(x)$$

zufügt und abnimmt, und bemerket, daß (no. 31)

$F'(x)$

$$F'(x) + F'(y)y' + F'(z)z'$$

die erſte Funktion von $F(x, y, z)$ iſt, die wir nur durch $F(x, y, z)'$ bezeichnen wollen, daß eben ſo

$$f'x + f'(y)\,y' + f'(z)z'$$

die erſte Funktion von $f(x, y, z)$ iſt, die wir ebenfalls durch $f(x, y, z)'$ bezeichnen wollen, ſo wird man haben:

$$z' + N = \frac{f'(y).F(x, y, z)' - F'(y).f(x, y, z)'}{F'(z).f'(y) - F'(y).f'(z)},$$

$$Mz' + Ny' = \frac{F'(x).f(x, y, z)' - f'(x).F'(x, y, z)'}{F'(z)f'(y) - F'(y).f'(z)}.$$

Wenn man alſo die veränderlichen Größen y, z, als Funktionen von x anſiehet, welche durch die Gleichungen der erſten Ordnung beſtimmt ſind,

$$z' + N = 0,\ Mz' + Ny' = 0,$$

ſo iſt es klar, daß dieſe Gleichungen zu folgenden werden:

$$F(x, y, z)' = 0 \text{ und } f(x, y, z)' = 0,$$

von denen augenſcheinlich die urſprünglichen Gleichungen ſind:

$$F(x, y, z) = A,\ f(x, y, z) = B.$$

A und B ſind willkührliche beſtändige Größen, daher ſind dieſe urſprüngliche Gleichungen, wegen der zwey willkührlichen beſtändigen Größen A und B, vollſtändig.

Aber es iſt möglich, daß, wenn man die urſprünglichen Gleichungen der Gleichungen

$$z' + N = 0,\ Mz' + Ny' = 0,$$

wo M und N von x, y, z, gegebene Funktionen ſind, ſuchet, man ſie nicht unter der vorhergehenden Form finden.

finden sollte. Indessen, unter welcher Form sie sich auch darstellen mögen, wenn sie zwey beständige willkührliche Größen a und b enthalten, so müssen sie unter den vorhergehenden begriffen seyn, und die beständigen Größen A und B werden nur Funktionen der beständigen a und b seyn können. Wenn man also aus diesen ursprünglichen Gleichungen die Werthe der beständigen a und b in x, y, z ziehet, und wenn diese Werthe P und Q sind, so, daß die in Rede stehenden Gleichungen zu der Form

$$P = a, \quad Q = b$$

gebracht würden, so folget, daß die Funktionen

$$F(x, y, z) \text{ und } f(x, y, z)$$

auch nur Funktionen von P und Q seyn können. Also, weil die ursprüngliche Gleichung, von der die Gleichung der ersten Ordnung

$$z' + Mz + N = 0$$

abgeleitet ist, die Form

$$F(x, y, z) = \varphi p = \varphi[f(x, y, z)]$$

hat, so wird diese ursprüngliche Funktion werden,

$$\text{Funkt. } (P, Q) = \varphi(\text{Funkt. } P, Q);$$

wenn die Funktion durch φ bezeichnet, willkührlich bleibet; woraus folget, daß P eine beliebige Funktion von Q seyn wird; so daß die ursprüngliche Gleichung der in Rede stehenden Gleichung von der ersten Ordnung überhaupt zu dieser sehr einfachen Form $P = \varphi Q$ zurückgeführt wird, wo die Funktion, die durch φ bezeichnet ist, willkührlich ist. Diese Methode führt, wie man sieht, die Bestimmung der Funktion von zwey veränderlichen Größen, zu der von zwey Funktionen einer einzigen veränderlichen Größe zurück, und ist vorzüglich wegen der Einfachheit

und

d Allgemeinheit des Reſultats merkwürdig. Ich habe
: vorhergehende Analyſis gegeben, weil ſie mir direc-
: und natürlicher ſcheint, als diejenigen, welche bis
;t über denſelben Gegenſtand gegeben worden ſind,
d ich habe geglaubt, daß ſie in einer Schrift nicht
: einem unrechten Orte ſtehen würde, deren Zweck es
, die Analyſis der Funktionen alle Schärfe und Deut-
ßkeit zu geben, deren ſie nur fähig iſt.

103.

Die vorhergehende Methode kann ſich auch auf
: Funktionen, von mehr als zwey veränderlichen Grö-
n ausdehnen.

Alſo, wenn u eine Funktion von drey veränderlichen
rößen x, y, z, iſt, durch die Gleichung

$$F(x, y, z, u) = \varphi(p, q)$$

ſtimmt (wo p und q von x, y, z, u, gegebene
unktionen ſind und $\varphi(p, q)$ eine beliebige Funktion
n p, q iſt), ſo wird man, durch eine ähnliche Analyſis,
ie no. 101, wenn man y und z als Funktionen
n x, durch die man die erſten Funktionen y′ und z′
urch die Subſtitution, daß p und q beſtändig bleiben,
ſtimmt, ſo wird man, ſage ich, eine Gleichung von
r erſten Ordnung, von der Funktion φ befreyet, von
lgender Form finden:

$$u' + Lu_{,} + M_{,}u + N = 0.$$

, N, L ſind hier von x, y, z, u, gegebene Funktionen,
d u′, u,, u ſind die erſten Funktionen von u in Be-
hung auf x, y, und z; ſo daß jede Gleichung zwiſchen

x,

x, y, z, u, und den ersten Funktionen von u, die nicht von einer ursprünglichen Gleichung der obigen Form abgeleitet werden kann.

Für die Gleichungen der ersten Ordnung, welche sich auf die vorhergehende Form reduciren lassen, wird man auch durch eine ähnliche Analysis, als die eben angegebene finden, daß, wenn man y, z, u als Funktionen von x ansieht, welche durch diese drey Gleichungen von der ersten Ordnung bestimmt sind

$$u' + N = 0, \quad Lu' + Ny' = 0, \quad Mu' + Nz' = 0,$$

und wenn man die ursprünglichen Gleichungen davon sucht, welche die drey willkührlichen beständigen Größen a, b, c, in sich halten sollten, ferner aus diesen Gleichungen die Werthe dieser beständigen Größen zöge, so daß man hätte

$$a = P, \quad b = Q, \quad c = R;$$

(P, Q, R, von x, y, z, u, gegebene Funktionen sind) so wird man auf der Stelle haben

$$P = \phi(Q, R)$$

für die ursprüngliche Gleichung der vorgegebenen Gleichung, in welcher $\phi(P, Q)$ eine willkührliche Funktion von P, und Q seyn wird.

104.

Hätte man aber durch die Bestimmung von z in einer Funktion von x und y, eine beliebige Gleichung von der ersten Ordnung zwischen x, y, z, z' und z, die

sich

ſich nicht auf die Form von no. 101 reduciren lieſſe, ſo würde die Methode von no. 102. nichts helfen. Dennoch kann man immer, für jede beliebige Form der gegebenen Gleichung, ſolche zu der Form von no. 103. zurückführen, indem man eine veränderliche Größe mehr einführt.

Es ſey alſo die Gleichung

$$z' = F(x, y, z, z_,),$$

gegeben, (die Funktion die durch den Caraktet F angezeigt iſt, iſt gegeben). Ich nehme $z_, = u$ an, und da z eine Funktion von x, y iſt, ſo iſt es klar, daß u auch eine Funktion von x, y ſeyn wird. Wenn man alſo die erſten Funktionen in Beziehung auf x allein nimmt, ſo wird man $z_,' = u'$ haben. Jetzt wird die gegebene Gleichung werden

$$z' = F(x, y, z, u),$$

Wenn man die erſten Funktionen in Beziehung auf y allein nimmt, und beobachtet, daß z und u Funktionen von x, und y, ſind, ſo hat man

$$z_,' = F'(y) + z_, F'(z) + u_, F'(u),$$

wo die Größen

$$F'(y),\ F'(z),\ F'(u)$$

die erſten Funktionen von $F(x, y, z, u,)$ in Beziehung auf den iſolirten veränderlichen Größen y, z, u, bezeichnen, wie wir es bis jetzt gemacht haben. Subſtituirt man alſo u und u' für z, und $z_,'$, ſo wird man die Gleichung haben:

$$u' = F'(y) + uF'(z) + u_,, F'(u),$$

welcher die Größen

$$F'(y),\quad F'(z),\quad F'(u)$$

die von x, y, z und u gegebenen Funktionen werden.

Diese Gleichung wäre also der Methode von no. fähig, wenn u eine Funktion der veränderlichen Gr x, y, z wäre, welche unter einander, als unabhäi angesehen werden; nichts hindert aber, sie als solch betrachten und auch u zu gleicher Zeit als eine einfache Fu tion von x, y, z, anzusehn, wenn man nur, auf eine di Substitution gleichförmigen Art, die ersten Funktio u', und u,, die sich auf die einzigen veränderli Größen x und y, beziehen, ausdrückt.

Man bezeichne durch u', u, und ,u die ersten Fu tionen von u in Beziehung auf x, y, z, und es leicht, durch die, für die Bildung der ersten Funktionen, gesetzten Principien zu sehn, daß weil z wesentlich Funktion von x und y ist, von denen z,' und z,' die er Funktionen in Beziehung auf jede dieser isolirten änderlichen Größen sind, so wird der vollstän Werth der ersten Funktion von u in Beziehung au seyn, u' + ,uz', und daß der vollständige Werth der sten Funktion von u in Beziehung auf y, seyn wird u,+,u diese Werthe sind diejenigen welche, in der obigen G chung nur durch u' und u,, vorgestellet sind. Man aber z = u angenommen, und durch die vorgegeb Gleichung hat man:

$$z' = F(x, y, z, u,);$$

also werden die Werthe, die man statt u' und u, sub tuiren muß, seyn:

u' +

$$u' + \alpha u F(x, y, z, u), \text{ und } u, + \alpha uu.$$

Wenn man also diese Substitutionen macht, und die Glieder nach den Größen u', u, und αu, ordnet, so hat man:

$$u' - u, F'(u) + \alpha u[F(x, y, z, u) - uF'(u)] - F'(y) - uF'(z) = 0.$$

Wird diese Gleichung mit der allgemeinen Formel in No. 103. verglichen, so giebt sie:

$$L = -F'(u), \quad M = F(x, y, z, u) - uF'(u)$$

$$\text{und } N = -F'(y) - uF'(z).$$

Die drey Gleichungen, durch welche man also y, z, u in Funktionen von x, bestimmen muß, werden seyn,

$$u' - F'(y) - uF(z) = 0,$$

$$u'F'(u) + y'[F'(y) + uF'(z)] = 0,$$

$$u'[F(x, y, z, u) - uF'(u)] - z'[F'(y) + uF'(z) = 0.$$

Die Schwürigkeit ist nun die, die ursprünglichen Gleichungen von denen diese hier abgeleitet seyn können, zu finden; es ist aber hinreichend eine davon zu finden, und es wäre sogar unnütz, die beyden andern zu finden.

105.

Wir wollen wirklich voraussetzen, daß man die drey ursprünglichen Gleichungen mit den drey willkührlichen beständigen Größen a, b, c, gefunden hätte; und es seyen P, Q, R, die Werthe dieser beständigen Größen die daraus entspringen, so hat man:

$$P = \varphi(Q, R)$$

zur allgemeinen Form der ursprünglichen Gleichung i
angezeigte no.

Diese Gleichung, wo der Carakter φ eine n
kührliche Funktion bezeichnet, kann in ihrem ganzen U
fange, der Gleichung der ersten Ordnung, in welcher
als eine Funktion von x, y, z, angesehen ist, geni
leisten; aber u ist gleich z vorausgesetzt worden, und
soll, der vorgegebenen Gleichung zufolge, eine Gleich
von x und y seyn; also ist die Gleichung

$$P = \phi(Q, R)$$

zu allgemein, und man wird noch, die Grenzen
chen müssen, die man der willkührlichen Gleichung in Be
hung auf die beyden Größen P und Q, geben m
damit diese Gleichung, der vorgegebenen Gleichung
nau entspricht.

Aber ohne mich in diese Untersuchung einzula
bemerke ich, daß, welches auch immer die wahre F
der willkührlichen Funktion sey, man sie gleich e
beständigen Größe annehmen kann, so daß P = a,
heißt, eine der ursprünglichen Gleichungen von den
gen drey Gleichungen, mit einer willkührlichen bes
digen Größe, einen Werth von u geben wird, der
Gleichung in u genüge leistet.

Jetzt wird man, wenn man z für u in dieser G
chung wieder substituirt, eine Gleichung von der er
Ordnung zwischen x, y, z und z, haben, in welch
als eine Funktion von x und y angesehen seyn so
aber, weil diese Gleichung, nur eine erste Funk

n z, in Beziehung auf y, enthält, ſo könnte man x
s eine beſtändige Größe, und z als eine einfache
nktion von y, anſehen; man wird alſo ihre urſprüng-
he Gleichung durch die Analyſis der Funktionen, ei-
r einzigen veränderlichen Größe finden, und weil
als eine beſtändige Größe angeſehen iſt, ſo wird die
llkührliche beſtändige Größe, die in dieſer urſprüng-
hen Gleichung entſtehen wird, ebenfalls eine be-
bige Funktion von x ſeyn, die wir p nennen
rden.

Man wird auf die Art den Werth von z in x und
mit den beyden Größen a und p, haben, welcher
r vorgegebenen Gleichung genüge leiſten wird. Die
ſtändige Größe a wird willkührlich bleiben; aber die
nktion p ſollte dieſer Gleichung gemäß beſtimmt wer-
n. Dieſerwegen braucht man nur den genannten
usdruck z zu ſubſtituiren. Alle Glieder die y enthal-
n, werden ſich vernichten, und es werden nur Glie-
r, welche x, p und p′ enthalten, bleiben; ſo daß
an von neuem eine Gleichung von der erſten Ordnung
iſchen den veränderlichen Größen x und p haben
ird, von welcher die urſprüngliche Gleichung den
erth von p in x, mit einer neuen willkührlichen be-
ändigen Größe geben wird.

Auf dieſe Art wird man endlich einen Werth von
in x und y, mit zwey willkührlichen beſtändigen Grö-
n a und b haben, welche der vorgegebenen Gleichung,
abhängig von dieſen beſtändigen Größen genüge leiſten
rd.

In

In der That, wenn

$$f(x, y, z, a, b) = 0$$

die, für die Bestimmung von z gefundne Gleichung ist, so wird man $b = \varphi a$ machen und die erste Funktion von

$$f(x, y, z, a, \varphi a)$$

in Beziehung auf die Größe a genommen und als einzige veränderliche angesehn, gleich Null machen. Man wird also eine Gleichung haben, welche zur Bestimmung von a dienen wird, und die Gleichung

$$f(x, y, z, a, \varphi a) = 0$$

wird die gesuchte ursprüngliche Gleichung, der vorgegebenen von der ersten Ordnung seyn; die durch φ bezeichnete Funktion, bleibt willkührlich.

Ich habe geglaubt diese Methode mit allem nöthigen Detail auseinander setzen zu müssen, um sie recht verständlich zu machen, weil sie neu ist und die ganze umgekehrte Analysis der Funktionen von zwey veränderlichen Größen die nicht die erste Ordnung übersteigen, zu der Analysis der Funktionen einer einzigen veränderlichen Größe zurückbringt.

106.

Um diese Methode durch ein Beyspiel, von welchem der Calcul einfach genug ist zu verdeutlichen, wollen wir voraussetzen, daß die vorgegebene Gleichung, von folgender Form sey:

$z' =$

$$z' = Ay + Bz + f(x, z,),$$

und B ſind beſtändige Größen und $f(x, z,)$ iſt eine beliebige von x und von z, gegebene Funktion. Führt man dieſe Gleichung, zu der allgemeinen Formel der vorhergehenden Nummer zurück, ſo wird man haben:

$$F(x, y, z, z,) = Ay + Bz + f(x, z,);$$

Alſo

$$F(x, y, z, u) = Ay + Bz + f(x, u),$$

und hieraus, wenn man die erſten Funktionen in Beziehung auf y und z, nimmt

$$F'(y) = A, \quad F'(z) = B;$$

ſo daß, wenn man dieſe Subſtitutionen in den drey Gleichungen von der erſten Ordnung zwiſchen x, y, z, u, macht, ſo wird die erſte unter ihnen

$$u' - A - Bu = 0$$

werden; welche, da ſie nur die veränderliche Größe u, die man als eine Funktion von x vorausſetzet, enthält, eine urſprüngliche Gleichung unabhängig von den beyden andern, haben wird. In der That, wenn man dieſe Gleichung durch e^{-Bx} multiplicirt, (e iſt die Zahl in welcher der hyperboliſche Logarithmus die Einheit iſt) ſo wird ihre erſte Zahl, die erſte Funktion von

$$ue^{-Bx} + \frac{Ae^{-Bx}}{B},$$

werden, wie man ſich leicht davon überzeugen kann, wenn man die erſte Funktion dieſer Größe, durch die Formeln von no. 32. ſuchet.

Da also das zweyte Glied Null ist, so hat m
wenn man zu den ursprünglichen Funktionen übergehe

$$(u + \frac{A}{B})\, e^{-Bx} = a.$$

a ist eine willkührliche beständige Größe.

Diese Gleichung wird also geben:

$$u = -\frac{A}{B} + ae^{Bx},$$

und wenn man für u ihren Werth z, einsetzet, so w
man die erste Gleichung

$$z, = -\frac{A}{B} + ae^{x}$$

haben, in welcher man, da z, die erste Funktion von z
Beziehung auf y allein ist, x als eine beständige G
ße, und z als eine Funktion von y, ansehen kann.
also daß zweyte Glied weder y noch z enthält, so w
ihre ursprüngliche Funktion, in dieser Voraussetzung
seyn:

$$\left(-\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right) y,$$

Gehet man also von den ersten Funktionen in Be
hung auf y allein, zu den ursprünglichen Funktion
über, so wird man diese ursprüngliche Gleichung hab

$$z = \left(-\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right) y + p.$$

p ist eine beliebige Funktion von x, welche immer
eine beständige Größe zugefügt werden kann, weil
erste Funktion in Beziehung auf y Null ist.

Aus dieſem Ausdrucke von z wird man die, der den erſten Funktionen z' und z, in Beziehung auf x y erhalten; und man wird haben:

$$z' = aBe^{Bx}\, y + p',$$

$$z, = -\frac{A}{B} + ae^{Bx}.$$

eſe Werthe in der vorgegebenen Gleichung eingeſetzt, bt:

$$aBe^{Bx}\, y + p' = Ay + B\left(-\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right) y$$

$$+ Bp + f(x, -\frac{A}{B} + ae^{Bx}),$$

eſe reducirt ſich auf:

$$p' = Bp + f(x, -\frac{A}{B} + ae^{Bx}),$$

o man ſiehet, daß die y verſchwunden ſind, ſo daß an p als eine Funktion von x allein beſtimmen ann.

Man multiplicire dieſe Gleichung mit e^{-Bx}, und an nehme an:

$$e^{-Bx} f(x, -\frac{A}{B} + ae^{Bx}) = F'x,$$

wird ſie werden:

$$(pe^{-Bx})' = F'x,$$

d geht man zu den urſprünglichen Funktionen über, wird man haben:

$$pe^{-Bx} = Fx + b,$$

b iſt

b ist eine willkührliche beständige Größe. Daraus erhält man:

$$p = e^{Bx}(Fx + b);$$

also, wenn man diesen Werth in den Ausdruck von z, der oben gefunden worden, einsetzt, so wird man haben:

$$z = (-\frac{A}{B} + ae^{Bx})y + (Fx + b)e^{Bx}.$$

Dieser Werth von z ist nur ein particulairer, aber da sie die zwey willkührlichen beständigen Größen a und b enthält, so wird sie den allgemeinen Werth geben, wenn man $b = \varphi a$ machet, und wenn man a durch die Gleichung

$$y + F'(a) + \varphi'a = 0$$

bestimmt; indem man durch $F'(a)$ die erste Funktion von Fx in Beziehung auf a genommmen, bezeichnet.

Wenn $B = 0$, so wird der Calcul einfacher, und man wird, wenn man:

$$f(x, Ax + a) = F'x$$

machet, die beyden Gleichungen

$$z = (Ax + a)y + Fy + \varphi a,$$

$$y + F'a + \varphi'a = 0,$$

finden, aus denen man a eliminiren muß.

107.

Wir wollen uns nicht weiter über das, was die Funktionen von mehreren veränderlichen Größen betrifft ausbreiten. Diejenigen, so den Calcul kennen, den

man

man Calcül der partiellen Differenzen nennet, werden ihn leicht, der Analyſis dieſer Funktionen, anpaſſen können, und dadurch dieſer Analyſis, die Entwickelungen, welche man ihr noch wünſchen könnte, geben.

Unſer Gegenſtand, in dieſem erſten Theile, war es nur, die Theorie der abgeleiteten Funktionen und Gleichungen, auf eine rein analytiſche und von jeder Vorausſetzung oder fremden Betrachtung unabhängige Art feſtzuſetzen.

Ende des erſten Theils.

1797.

In der That, wenn

$$f(x, y, z, a, b) = o$$

die, für die Bestimmung von z gefundne Gleichung ist, so wird man $b = \varphi a$ machen und die erste Funktion von

$$f(x, y, z, a, \varphi a)$$

in Beziehung auf die Größe a genommen und als einzige veränderliche angesehn, gleich Null machen. Man wird also eine Gleichung haben, welche zur Bestimmung von a dienen wird, und die Gleichung

$$f(x, y, z, a, \varphi a) = o$$

wird die gesuchte ursprüngliche Gleichung, der vorgegebenen von der ersten Ordnung seyn; die durch φ bezeichnete Funktion, bleibt willkührlich.

Ich habe geglaubt diese Methode mit allem nöthigen Detail auseinander setzen zu müssen, um sie recht verständlich zu machen, weil sie neu ist und die ganze umgekehrte Analysis der Funktionen von zwey veränderlichen Größen die nicht die erste Ordnung übersteigen, zu der Analysis der Funktionen einer einzigen veränderlichen Größe zurückbringt.

106.

Um diese Methode durch ein Beyspiel, von welchem der Calcul einfach genug ist zu verdeutlichen, wollen wir voraussetzen, daß die vorgegebene Gleichung, von folgender Form sey:

$z' =$

$$z' = Ay + Bz + f(x, z,).$$

A und B ſind beſtändige Größen und $f(x, z,)$ iſt eine beliebige von x und von z, gegebene Funktion. Führt man dieſe Gleichung, zu der allgemeinen Formel der vorhergehenden Nummer zurück, ſo wird man haben:

$$F(x, y, z, z,) = Ay + Lz + f(x, z,);$$

alſo

$$F(x, y, z, u) = Ay + Bz + f(x, u),$$

und hieraus, wenn man die erſten Funktionen in Beziehung auf y und z, nimmt

$$F'(y) = A, \quad F'(z) = B;$$

daß, wenn man dieſe Subſtitutionen in den drey Gleichungen von der erſten Ordnung zwiſchen x, y, z, u, macht, ſo wird die erſte unter ihnen

$$u' - A - Bu = 0$$

werden; welche, da ſie nur die veränderliche Größe u, die man als eine Funktion von x vorausſetzet, enthält, eine urſprüngliche Gleichung unabhängig von den beyden andern, haben wird. In der That, wenn man dieſe Gleichung durch e^{-Bx} multiplicirt, (e iſt die Zahl in welcher der hyperboliſche Logarithmus die Einheit iſt) ſo wird ihre erſte Zahl, die erſte Funktion von

$$ue^{-Bx} + \frac{Ae^{-Bx}}{B},$$

werden, wie man ſich leicht davon überzeugen kann, wenn man die erſte Funktion dieſer Größe, durch die Formeln von no. 32. ſuchet.

Da also das zweyte Glied Null ist, so hat man, wenn man zu den ursprünglichen Funktionen übergehet:

$$(u + \frac{A}{B})\, e^{-Bx} = a.$$

a ist eine willkührliche beständige Größe.

Diese Gleichung wird also geben:

$$u = -\frac{A}{B} + ae^{Bx},$$

und wenn man für u ihren Werth z, einsetzet, so wird man die erste Gleichung

$$z, = -\frac{A}{B} + ae^{x}$$

haben, in welcher man, da z, die erste Funktion von z in Beziehung auf y allein ist, x als eine beständige Größe, und z als eine Funktion von y, ansehen kann. Da also daß zweyte Glied weder y noch z enthält, so wird ihre ursprüngliche Funktion, in dieser Voraussetzung nur seyn:

$$\left(-\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right) y,$$

Gehet man also von den ersten Funktionen in Beziehung auf y allein, zu den ursprünglichen Funktionen über, so wird man diese ursprüngliche Gleichung haben:

$$z = \left(-\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right) y + p.$$

p ist eine beliebige Funktion von x, welche immer als eine beständige Größe zugefügt werden kann, weil ihre erste Funktion in Beziehung auf y Null ist.

Aus dieſem Ausdrucke von z wird man die, der beyden erſten Funktionen z′ und z, in Beziehung auf x und y erhalten; und man wird haben:

$$z' = aBe^{Bx}\, y + p',$$

$$z, = -\frac{A}{B} + ae^{Bx}.$$

Dieſe Werthe in der vorgegebenen Gleichung eingeſetzt, giebt:

$$aBe^{Bx}\, y + p' = Ay + B\left(-\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right)y + Bp + f\left(x, -\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right),$$

Dieſe reducirt ſich auf:

$$p' = Bp + f\left(x, -\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right),$$

wo man ſiehet, daß die y verſchwunden ſind, ſo daß man p als eine Funktion von x allein beſtimmen kann.

Man multiplicire dieſe Gleichung mit e^{-Bx}, und man nehme an:

$$e^{-Bx} f\left(x, -\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right) = F'x,$$

ſo wird ſie werden:

$$(pe^{-Bx})' = F'x,$$

und geht man zu den urſprünglichen Funktionen über, ſo wird man haben:

$$pe^{-Bx} = Fx + b,$$

b iſt

b ist eine willkührliche beständige Größe. Daraus erhält man:

$$p = e^{Bx}(Fx + b);$$

also, wenn man diesen Werth in den Ausdruck von z, der oben gefunden worden, einsetzt, so wird man haben:

$$z = (-\frac{A}{B} + ae^{Bx})y + (Fx + b)e^{Bx}.$$

Dieser Werth von z ist nur ein particulairer, aber da sie die zwey willkührlichen beständigen Größen a und b enthält, so wird sie den allgemeinen Werth geben, wenn man $b = \varphi a$ machet, und wenn man a durch die Gleichung

$$y + F'(a) + \varphi' a = 0$$

bestimmt; indem man durch $F'(a)$ die erste Funktion von Fx in Beziehung auf a genommmen, bezeichnet.

Wenn $B = 0$, so wird der Calcul einfacher, und man wird, wenn man:

$$f(x, Ax + a) = F'x$$

machet, die beyden Gleichungen

$$z = (Ax + a)y + Fy + \varphi a,$$

$$y + F'a + \varphi' a = 0,$$

finden, aus denen man a elimininen muß.

107.

Wir wollen uns nicht weiter über das, was die Funktionen von mehreren veränderlichen Größen betrifft ausbreiten. Diejenigen, so den Calcul kennen, den man

ian Calcül der partiellen Differenzen nennet, erden ihn leicht, der Analyſis dieſer Funktionen, npaſſen können, und dadurch dieſer Analyſis, die Ent- ickelungen, welche man ihr noch wünſchen könnte, eben.

Unſer Gegenſtand, in dieſem erſten Theile, war es ur, die Theorie der abgeleiteten Funktionen und Gleichungen, auf eine rein analytiſche und von jeder Zorausſetzung oder fremden Betrachtung unabhängige Art eſtzuſetzen.

Ende des erſten Theils.

Für $fx = x^m$ ist 12, 14/Feb 12.

$f'x = mx^{m-1}$

$f''x = m(m-1)x^{m-2}$

$f'''x = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$

Für $fx = a^x$ p 25

sei $a = 1+b$

$A = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} \cdots$

$f'x = Aa^x = a^x la = e^{x la}$

$f''x = A^2 a^x$

$f'''x = A^3 a^x$

$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^3x^3}{2.3} \cdots$

$e^A = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} \cdots$

sei $A = 1$, gleich $2,718\ldots = e$

$a = e^A$, Da $y = a^x$ ist

$= \log y$ für Grdz. a

$\frac{1}{A}$ ist $\log e$, f. Grdz. a

$A = \log a$, f. Grdz. e

Wenn gegeben p, q, r etc.

Für $y = ap + pq$

$y' = ap' + aq'$

Für $y = apq$

$y' = apq' + aqp'$

Für $y = apqr$

$y' = apqr' + aprq' + aqrp'$

Für $y = \frac{ap}{q}$

$y' = \frac{ap'}{q} - \frac{apq'}{q^2}$

Für $y = fp$, also f. x

$y' = p'f'p$

Für $y = f(p, q)$, f. Grdz.

$y' = p'f'(p) + q'f(q)$.

Für $y = f(p, q, r)$

$y' = p'f'(p) + q'f(q) + r'f(r)$

trifft ausbreiten. Diejenigen, so den Calcul kennen, ver-

man

Lagrange's Theorie der analytiſchen Funktionen.

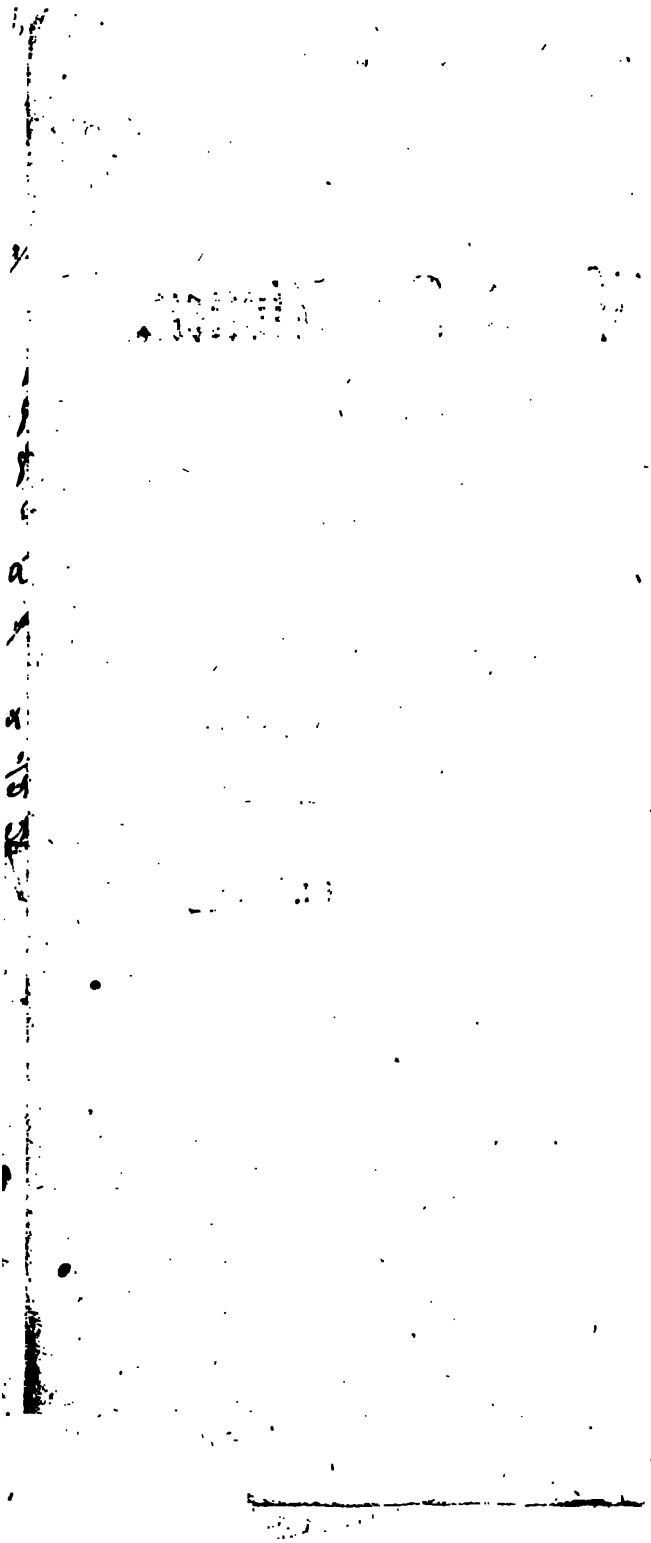
Aus dem Franzöſiſchen überſetzt von

J. P. Grüſon

nebſt einem Zuſatze von Lagrange.

Zweyter Theil.

Berlin,
bey F. T. Lagarde
1799.



Vorrede.

Dieſer zweyte Theil von lagrangens Theorie der analytiſchen Funktionen welcher die Anwendung auf die Geometrie und Mechanik enthält, verdient gewiß nicht weniger von unſern größten Geometern ſtudirt zu werden, als der erſte Theil. Es iſt zum Erſtaunen, zu welcher Höhe dieſer berühmte und allgemein verehrte Veteran der neuern Analyſis, in dieſen zwey nicht ſtarken Theilen die Analyſis zu erheben weiß. — Sie enthalten alles was nur immer ſublimes in der Differential- und Integralrechnung vorhanden ſeyn mag, und wird als wahrhaft claſſiſches Werk gewiß den Dank und die Bewunderung unſrer ſpäteſten Nachkommen erhalten. Möge doch dieſer verehrungswürdige Greis in ich hier den allerverbindlichſten Dank für den ir überſandten Zuſatz im Nahmen aller Leſer labatte, noch lange zum Flor und Erweiterung der Wiſſenſchaften leben, die er ſo unermüdet und mit ausgezeichnet ſeltenen Glücke bearbeitet unn bereichert hat. Ich bin gewiß, daß jeder der Gefühl für herzeugende Wiſſenſchaften hat, dieſe meine Wünſche ſehr gerne unterſchreibt.

Um mancher Leser willen muß ich noch erinne daß im ersten Theile und auf dem ersten Bo dieses zweyten Theils, aus Mißverstand des Cor tors für fonction prime, seconde, &c. equa prime, seconde &c. immer erste Funktic zweyte Funktion, erste Gleichung, zwey Gleichung, statt Erstefunktion, Zwey funktion, Erstegleichung, Zweytegleichu stehet, doch hoffe ich, daß, da nur Meister in Wissenschaft dieses Werk zu ihrer Lectüre wäl können, dadurch nichts unverständlich gewor ist.

Man muß und man wird es in der That Verleger Herrn Lagarde sehr Dank wissen, er nun auch von Lacroixs vortrefflichen vollst digen Lehrbegriff der Differential- Integralrechnung eine deutsche Ausgabe ve staltet, woran ich gegenwärtig mit vielem Vergn arbeite. — Durch dieses Lacroische Werk wird len jungen Analysten Lagrangens Theorie der a tischen Funktionen verständlicher werden, und erhalten ein Werk, was noch nicht so vollständi deutscher Sprache vorhanden ist. Berlin, den October 1798.

Grüson.

Verzeichniß,

der in dieſen Theile enthaltenen Materien.

Zweyter Theil.

Anwendung der Theorie auf die Geometrie und Mechanik.

Anwendung auf die Geometrie.

No. 108—112 Verſchiedene Arten wie man die Tangenten betrachtet hat. Theorie der Tangenten und der Berührungen von verſchiedenen Ordnungen, nach den Principien der Geometrie der Alten. pap. 1—9

— 113—116. Geradlinigte Tangenten, berührende Kreiſe, und von dem Orte ihrer Mittelpunkte Oskulirende Kreiſe und von dem Ort ihrer Mittelpunkte 9—17

— 117—119. Allgemeine Analyſis von der Berührung der ebenen Curven. Von den paraboliſchen Curven, deren Lauf in einen gegebenen Punkte ſich am meiſten den Laufe einer gegebenen Curve nähert. 17—22

— 120—121. Von Berührungen in ſingulären Fällen, und von den Aſſymtotiſchen Linien 22—28

— 122—124. Problem über die Berührung der Curve. Beiſpiel eine Eigenſchaft der Kegelſchnitte betreffend. Bemerkung über die urſprünglichen ſingulären Gleichungen, welche man erhält. 29—37

— 125—126. Fragen wo man eine Relation zwiſchen den zwey Elementen einer Berührung der erſten Ordnung vorgiebt: von den Curven, welche durch die urſprüngliche ſingulaire Gleichung einer Gleichung der erſten Ordnung vorgeſtellt ſind. 37—45

— 127—128. Dieſelben Aufgaben für die Berührung der zweyten Ordnung. Theorie und Conſtruction der urſprünglichen ſingulären Gleichungen höherer Ordnungen, 45—52

— 129—130. Beſonderes Beyſpiel die analyſiſche Theorie der Entwickelungen betreffend. 52—58

— 131—133. Größte und kleinſte Werthe einer Funktion mit einer veränderlichen Größe. 59—66

— 134—138. Von dem Maaß der Flächeninhalte, und von der Länge der Bogen in den ebenen Curven. Von dem Maaße der Körper und dem der conoidiſchen Oberflächen. Allgemeines Princip von der analytiſchen Auflöſung dieſer Aufgaben. 66—77

No. 138,

No. 139—141. Theorie von der Berührung der Curve von doppelter Krümmung. Von dem Krümmungshalbmeſſer, von den Mittelpunkten der Krümmung, und von dem Orte dieſer Mittelpunkte. ; ; ; ; 77—83
— 142—143. Unterſuchung der Fälle wo der Krümmungshalbmeſſer eine Tangente an der Curve der Mittelpunke der Krümmung iſt, und wo dieſe Curve die Evolute der gegebenen iſt. 83—88
— 144—146. Maaß der Lagen einer Curve von doppelter Krümmung. Von den krummen Oberflächen und ihrer Berührungsebenen. ; ; ; ; 88—93
— 147 Ausdehnung der Theorie von no. 53. Mittel die Funktionen von einer beliebigen Anzahl veränderlicher Größen, in begränzte Reihen von ſo viel Glieder als man will, zu entwickeln. ; ; ; 93—98
— 148—150. Theorie von der Berührung der krummen Oberflächen. Von der Berührung von verſchiedenen Ordnungen. ; ; ; ; 98—103
—191—155. Von Berührungskugeln; von dem Ort ihrer Mittelpunkte. Von den Linien der größten und kleinſten Krümmung. Eigenſchaften dieſer Linien ; 103—112
— 156—157. Auflöſung der Aufgaben in welchen man eine Relation zwiſchen den Elementen der Berührung von der erſten Ordnung der krummen Oberflächen vorgibt. Conſtruction dieſer Auflöſung. ; ; ; ; 112—115
— 158—159. Methode um die urſprüngliche Gleichung, gewiſſer Gleichungen von der zweyten Ordnung zwiſchen drey veränderlichen Größen zu erhalten. Gleichung der entwickelungsfähigen Oberflächen ; ; ; 115—119
— 160—162. Größte und kleinſte Ordinaten der krummen Oberflächen. Erſte Auflöſung der Aufgaben von den Maximis und Minimis. Eigne Kennzeichen das Maximum von dem Minimum zu unterſcheiden. Anwendung auf
— eine geometriſche Frage. ; ; 119—126
163—167. Allgemeine Auflöſung der Frage von den Maximis und Minimis. Unterſuchung der Maxima und Minima in den Funktionen von mehreren veränderlichen Größen. Fälle worin man gegebene Relationen zwiſchen den veränderlichen Größen haben muß. ; 126—136
—168—169. Unterſuchung der Curven in welchen eine gegebene Funktion der Coordinaten und ihrer abgeleiteten Funktionen in jeden Punkt ein Größtes oder ein Kleinſtes ſeyn muß. Fälle, wo die Funktion nur die Elemente der Berührung enthält. Neue Eigenſchaft der Kegelſchnitte. 136—139
— 170—172. Fragen von Maximis und Minimis welche ſich auf die Methode der Variationen beziehen. Von dem

dem Maximum und Minimum gemeinschaftlichen Gleichungen. Von dem Gebrauch der beständigen willkührlichen Größen . . . . 139—146.
173—178. Untersuchung der Kennzeichen, wodurch die Maxima von den Minima unterschieden werden können. Bemerkung über eine singuläre Schwierigkeit. Beyspiele in welchen diese Schwierigkeit vorkommen 146—158.
179—182. Fälle worinn man eine Beziehung zwischen den veränderlichen Größen haben muß. Ausdehnung dieser Methode auf Functionen von einer beliebigen Anzahl von veränderlichen Größen. Von der Curve des geschwinsten Falls zwischen gegebenen Punkten. . . . 159—167.
183. Bedingungsgleichungen welche die Mittel darbieten, zu unterscheiden ob eine vorgegebene Funktion eine Erstefunktion ist oder nicht, oder überhaupt ob es eine abgeleitete Funktion von einer gewissen Ordnung ist. . . 167—172.
184. Zusatz zu der Theorie von no. 45, über das Gesetz welches zwischen den Gliedern der Entwiklung einer Funktion von mehreren veränderlichen Größen, und zwischen den welche aus der Entwicklung dieser Glieder selbst entstehen, statt haben muß. . . . . 172—176.

Anwendung auf die Mechanik.

185—187. Von dem Gegenstand der Mechanik. Von der gleichförmig beschleunigten Bewegung . . 177—181.
188—189. Von der geradlinigten Bewegung überhaupt. Beziehung zwischen dem Raum, der Geschwindigkeit und der beschleunigenden Kraft. . . . 181—187.
190—192. Von der Zusammensetzung der Bewegungen, und besonders von der Zusammensetzung aus drey gleichförmigen Bewegungen. Von der Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten. . . . 187—191.
193—194. Von der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte. Von der Bahn der geworfenen Körper (trajectoire des projectiles) im leeren Raum 191—195
195—197. Von der krumlinigten Bewegung. Von den Geschwindigkeiten und Kräften in diesen Bewegungen. . . . . 195—200
198—199. Von den allgemeinen Gleichungen der Bewegung eines durch beliebige Kräfte gereitzten Körpers. 200—203
200. Von der Art, die Zeit in diesen Gleichungen zu eliminiren. Allgemeines Princip dieser Relation 203—206
201—202. Von der Frage wo verlangt wird, den Wiederstand zu finden, welchen das Mittel dem geworfenen Kör-

per

per entgegenſetzen muß, damit er eine gegebene Curv
ſchreibt. = = = =
— 203—205. Analyſis von der Auflöſung welche Ne
Von dieſem Problem, in der erſten ausgabe der Princ
gegeben hat. Wahre Quelle des Irrthums in dieſer
ſung: Mittel ſie zu berichtigen. = 214—
— 206—207. Von der Bewegung eines Körpers, der
Kräfte die auf gegebene Oberflächen ſenkrecht ſind
wird, oder gewiſſen Bedingungen unterworfen iſt. 225—
— 208—210. Von der Bewegung mehrerer Körper, welc
einander wirken. Bedindungsgleichungen zwiſchen den
dinatdn verſchiedener Körper. Art, von dieſen Gleich
die von der gegenſeitigen Wirkung der Körper entſte
Kräften abzuleiten. = = = 219—
— 211—214. Princip von der Erhaltung der Bewegung de
telpunkts der Schweere. Beſondere Art die Lage
Mittelpunktes zu beſtimmen = = 234—
— 215—218. Von dem Geſetze der Flächeninhalte in de
wegung der Umwälzung um eine feſte Axe, oder ein
ſten Punkts, oder in der Bewegung eines freyen
ſtems = = = = 242—
— 219—222. Von dem allgemeinen Princip der lebe
Kräfte in der Bewegung eines durch beliebige Kräf
reitzten Syſtems. = = 250.
— 223—224. Von der Erhaltung der lebendigen Kräfte bi
Stoß elaſtiſcher Körper. Von dem Verluſt der lebe
Kräfte bey dem Stoß der harten Körper, oder übe
bey den plötzlichen Veränderungen welchen das Syſtem
geſetzt ſein kann. = = = 256.
— 225—227. Von der Art, wie jede Kraft dazu beitr
Summe der lebendigen Kräfte zu vermehren. Vo
Werthe dieſer Summe im Zuſtand des Gleichgew
Allgemeine Bemerkungen über die Oekonomie der le
gen Kräfte bey den Maſchinen. = 260—
— 228. Schluß = = 265—
Zuſatz über das Princip der virtuellen Geſchwindigkeite
266—

Theorie
der
analytiſchen Funktionen.

Zweyter Theil.

Anwendung der Theorie auf die Geometrie und Mechanik.

108.

Die gewöhnlichen Operationen der Algebra reichen hin, um die Probleme von der Theorie der Curven aufzulöſen welche nur in den Verhältniſſen der Linien beſtehen, die bey den Curven auf eine gewiſſe Art gezogen und beſtimmt ſind; aber die Beſtimmung der Tangenten, der Krümmungshalbmeſſer, der Flächen, u. ſ. w. hängt weſentlich von den auf Funktionen ſich beziehenden Operationen ab.

Nach den alten Geometern iſt eine gerade Linie Tangente einer Curve, wenn ſie einen Punkt mit der

Curve gemein hat, und man durch dieſen Punkt keine andere gerade Linie zwiſchen jener und der Curve ziehen kann. Durch dieſes Princip haben ſie die Tangenten bey der kleinen Anzahl Curven, die ſie betrachtet haben, beſtimmt. Aber, ſeitdem man durch die Anwendung der Algebra auf die Geometrie die Curven der Analyſis unterworfen hat, hat man die Tangenten aus andern Geſichtspunkten betrachtet; man hat ſie als Secanten angeſehen, deren zwey Durchſchnittspunkte vereinigt ſind, oder als die Verlängerung von unendlich kleinen Seiten der Curve, welche als ein Polygon von unendlich vielen Seiten betrachtet worden, oder als die Richtung der zuſammengeſetzten Bewegung, durch welche die Curve beſchrieben ſeyn kann. Dieſe verſchiedene Arten nun, die Tangenten zu betrachten, haben zu den algebraiſchen Methoden Anlaß gegeben, die auf die Gleichheit der Wurzeln bey den Gleichungen gegründet ſind, und zu den Differentialmethoden, die auf dem Verhältniſſe der unendlich kleinen Differenzen oder der Fluxionen der Coordinaten beruhen. Dieſe Methoden laſſen für die Allgemeinheit und Einfachheit nichts mehr zu wünſchen übrig, aber diejenigen, die mit Recht die Evidenz und die Strenge der alten Demonſtrationen bewundern, bedauren, daß ſie dieſe Vorzüge nicht in den Principien dieſer neuen Methoden finden. Die Theorie der Funktionen, die wir im erſten Theil entwickelt haben, ſetzt uns in den Stand, das Problem der Tangenten und die andern Probleme von derſelben Art nach den Begriffen und Principien der Alten zu behandeln, und auf dieſem Wege den Reſultaten der Analyſis den Character zu geben, der ihre Auflöſungen unterſcheidet.

109.

Um diese Fragen auf eine allgemeine Art zu betrachten, so sey $y = fx$ die Gleichung einer gegebenen beliebigen Curve, und $q = Fp$ die Gleichung einer geraden Linie oder einer andern Curve, die man mit jener vergleichen will, wo x und y die Abscisse und Ordinate der ersten Curve, p und q die Abscisse und Ordinate der andern Curve, auf dieselbe Axe als x und y bezogen, sind.

Damit diese beyden Curven in Beziehung auf die Abscisse x einen Punkt gemein haben, so muß indem man $p = x$ macht, $q = y$ seyn; also $y = Fx$, und folglich $Fx = fx$.

Um jetzt den Lauf dieser Curven über diesen Punkt hinaus zu vergleichen, so wird man in ihre Gleichungen $x + i$ an die Stelle von x und von p setzen, und man wird $f(x + i)$ und $F(x + i)$ für die Ordinaten haben, die denselben Punkt der Axe für die x entsprechen, und um die Größe i von der Ordinate, die durch den gemeinschaftlichen Punkt geht entfernt sind. Die Differenz dieser Ordinaten wird also seyn

$$f(x + i) - F(x + i),$$

nemlich, indem man die Funktionen entwickelt und beobachtet, daß man bereits $fx - Fx = 0$ hat,

$$i(f'x - F'x) + \frac{i^2}{2}(f''x - F''x) + \frac{i^2}{1 \cdot 2}(f'''x - F'''x) + \&c.$$

und diese Differenz drückt die Entfernung der Punkte von den zwey Curven aus, die der nemlichen Abscisse $x + i$ entsprechen.

Man sieht überhaupt sogleich, daß diese Entfernung um so kleiner seyn wird, und folglich die Curve sich um

so viel mehr nähern werden, je mehr Glieder bey fange dieser Reihe verschwinden.

Die Näherung wird also um so größer seyn, man $f'x = F'x$ hat, d. h. wenn die ersten Funktion Ordinaten dieser zwey Curven für die nemliche Ab gleich werden. Die Näherung wird noch größer wenn die zweyten Funktionen $f''x$, und $F''x$ de Ordinaten auch gleich werden, u. s. w.

II Q.

Um aber genauer zu sehen, worin eigentlich dies schiedenen Grade der Näherung bestehen, so wolle eine beliebige dritte Curve betrachten, welche dur Ordinaten r und s auf die nemliche Axe bezogen und deren Gleichung $s = \varphi r$ ist, und wir wollen s annehmen, daß sie auch mit den beyden andern f nemliche Abscisse x einen Punkt gemein habe, welch fordert, daß die Ordinaten dieser Abscisse gleich seye daß man folglich

$$\varphi x = fx = Fx$$ habe.

Es sey D die Differenz der Coordinaten von beyden ersten Curven für die nemliche Abscisso x und Δ die Differenz der Coordinaten von der ersten dritten Curve für die nemliche Abscisse $x + i$, so man haben

$$D = f(x + i) - F(x + i),$$

und eben so

$$\Delta = f(x + i) - \varphi(x + i).$$

Es ist klar, daß die dritte Curve nicht zwischen beyden ersten durchgehen kann, es sey denn, daß fü nen beliebigen Werth von i, so klein als man nur w der Werth von D den Werth von Δ, von den Z

abstrahirt, übertrifft.

Laßt uns die Funktionen

$$f(x + i),\ F(x + i),\ \varphi(x + i)$$

jede einzeln, nach der Formel von no. 53. entwickeln und sogleich bey den ersten Gliedern einhalten. Nennt man j eine unbestimmte, aber zwischen den Grenzen o und i enthaltene Größe, so wird man durch diese Formel haben:

$$f(x + i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''(x + j),$$

und eben so

$$F(x + i) = Fx + iF'x + \frac{i^2}{2} F''(x + j),$$

$$\varphi(x + i) = \varphi x + i\varphi'x + \frac{i^2}{2} \varphi''(x + j),$$

wo die Größe j in allen drey Funktionen, nicht die nemliche wird seyn können, es genüget daß sie zwischen den nemlichen Grenzen enthalten ist.

Macht man diese Substitutionen in den Ausdrücken von D und Δ, so wird man weil $fx = Fx = \varphi x$ wegen des den drey Curven gemeinschaftlichen Punkts ist, haben:

$$D = i(f'x - F'x) + \frac{i^2}{2}[f''(x + j) - F''(x + j)],$$

$$\Delta = i(f'x - \varphi'x) + \frac{i^2}{2}[f''(x + j) - \varphi''(x + j)].$$

Jetzt angenommen, daß die beyden ersten Curven beschaffen sind, daß man $f'x = F'x$ hat, so wird sich der Werth von D auf

$$D = \frac{i^2}{2}[f''(x + j) - F''(x + j)$$ reduciren;

und es ist leicht, sich zu überzeugen, daß, so lange in dem Ausdrucke von Δ das mit i behaftete Glied nicht

Null seyn wird, man immer i klein genug nehmen kann, damit die Größe Δ größer werde als die Größe D, wenn man nemlich von dem Zeichen abstrahirt. In der That, wenn man diese beyden Größen durch i dividirt, so genügt es, daß die Größe $f'x - \varphi'x$ größer sey als

$$\frac{i}{2}\,[\varphi''(x+i) - F''(x+i)],$$

welches augenscheinlich immer möglich ist, weil man i so klein, als man nur will, nimmt; und es ist auch sichtbar, daß, sobald als diese Bedingung für einen bestimmten Werth von i statt hat, sie auch um so mehr für alle noch kleinere Werthe von i statt haben wird.

Die dritte Curve könnte also in diesem Falle nicht zwischen den beyden erstern durchgehen, wenn nicht etwa die Größe $f'x - \varphi'x$ Null wird, d. h. wenn man nicht $\varphi'x = f'x$ hat, in welchem Falle die vorhergehende Conclusion nicht mehr statt findet.

III.

Wir wollen ferner annehmen, daß man zugleich

$$F'x = f'x \text{ und } F''x = f''x$$

habe; nimmt man nun bey der Entwickelung der Funktionen drey Glieder, so haben wir durch dieselbe Formel aus no. 53.

$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2}f''x + \frac{i^3}{2.3}f'''(x+i),$$

$$F(x+i) = Fx + iF'x + \frac{i^2}{2}F''x + \frac{i^3}{2.3}F'''(x+i),$$

$$\phi(x+i) = \phi x + i\phi'x + \frac{i^2}{2}\varphi''x + \frac{i^3}{2.3}\varphi'''(x+i).$$

Diese Werthe in den allgemeinen Ausdrücken von D und Δ substituirt, werden wegen

$fx =$

$fx = Fx = \varphi x$, und $f'x = F'x$, $f''x = F''x$,

geben:

$$D = \frac{i^2}{2.3}\,[f'''(x+i) - F'''(x+i)],$$

$$\Delta = i(f'x - \varphi'x) + \frac{i^2}{2}(f''x - \varphi'') + \frac{i^3}{2.3}\,[f'''(x+i) - \varphi'''(x+i)].$$

Hier ist leicht zu sehen, daß, so lange in dem Ausdrucke von Δ die mit i und i^2 behafteten Glieder nicht Null seyn werden, man i klein genug nehmen könnte, damit die Größe Δ viel größer als D wird, wenn man nemlich von den Zeichen abstrahirt.

Denn dividirt man diese beyden Größen durch i, so genügt es, daß die Größe

$$f'x - \varphi'x + \frac{i}{2}\,(f''x - \varphi''x)$$

größer sey als

$$\frac{i^2}{2.3}\,[\varphi'''(x+i) - F'''(x+i)],$$

welches augenscheinlich möglich ist, wenn $f'x - \varphi'x$ nicht Null ist; wenn aber $f'x - \varphi'x$ Null ist, alsdann, wenn man noch durch i dividirt, wird es genügen, daß

$$f''x - \varphi''x$$

eine Größe sey, die größer als

$$\frac{i}{3}\,[\varphi'''(x+i) - F'''(x+i)] \text{ ist;}$$

welches sichtbarlich wiederum möglich ist, indem man den Werth von i, so viel als man will vermindert, vorausgesetzt, daß $f''x - \varphi''x$ nicht Null ist.

In diesem Falle könnte also die dritte Curve nicht zwischen den beyden erstern durchgehen, wenn man nicht etwa zugleich

$\varphi'x = f'x$ und $\varphi''x = f''x$ hätte.

Auf eben die Art wird man beweiſen, daß, wenn man für die beyden erſten Curven

$f'x = F'x$, $f''x = F''x$, und $f'''x = F'''x$,

hat, die dritte Curve nicht zwiſchen den beyden erſten gezogen werden könnte, es ſey denn, daß man auch

$\varphi'x = f'x$, $\varphi''x = f''x$, $\varphi'''x = f'''x$

hätte, u. ſ. w.

112.

Man kann hieraus allgemein ſchließen, daß, wenn man eine beliebige Curve hat, und eine andere Curve mit dieſer einen Punkt gemein hätte, welches erfordert, daß ihre Ordinaten für die nemliche Abſciſſe i, ferner auch die erſten Funktionen dieſer Ordinaten für die nemliche gemeinſchaftliche Abſciſſe gleich ſeyn, alsdann es unmöglich ſeyn wird, daß irgend eine andere Curve, welche man durch dieſen gemeinſchaftlichen Punkt führen würde, zwiſchen beyden Curven durchginge, wenn nicht etwa die erſte Funktion von ihrer Ordinate für die nemliche Abſciſſe auch den erſten Funktionen von ihren Ordinaten gleich iſt.

Und wenn außer den erſten Funktionen dieſer Ordinaten ihre zweyten Funktionen für die nemliche Abſciſſe auch gleich wären, alsdann würde es unmöglich ſeyn, daß irgend eine andere Curve, die durch den gemeinſchaftlichen Punkt ginge, auch zwiſchen den beyden Curven durchliefe, es ſey denn, daß die erſten und zweyten Funktionen von ihrer Ordinate, reſpective den erſten und zweyten Funktionen der gemeinſchaftlichen Ordinate beyder Curven gleich wären, und ſo von den übrigen.

Eigentlich

Eigentlich zu reden, treffen diese Curven nur in dem Punkt, wo die Ordinaten gleich sind zusammen, und die Gleichheit der ersten, zweyten Funktionen u. s. w. dieser Ordinaten, macht sie nicht in andern Punkten zusammentreffend, sondern sie läßt sie sich solchergestalt nähern, daß eine andere Curve, für welche dieselbe Gleichheit statt haben würde, zwischen ihnen durchgehen könne.

Dieses ist der reine Begriff, welche man sich von diesen verschiedenen Graden der Näherung der Curven machen muß, welchen man gemeiniglich **Berührung** (contact, osculation &c.) nennt, und welche die gewöhnliche Art, den Differentialcalcul abzufassen, als mehr oder weniger strenge, oder als mehr oder weniger ausgedehnte Zusammentreffungen ansehen läßt.

113.

Wenn man eine beliebige Curve hat die durch die Gleichung $y = fx$ vorgestellt ist, so vergleiche man sie sogleich mit einer beliebigen geraden Linie. Weil wir allgemein durch $q = Fp$ die Gleichung der Curve, mit welcher man die gegebene vergleichen will, vorgestellt haben (no. 109), so wird man für die gerade Linie haben

$$Fp = a + bp,$$

wo a und b zwey beständige Größen sind, welche die Lage dieser geraden Linie bestimmen.

Die Bedingung eines gemeinschaftlichen Punkts giebt sogleich

$$fx = Fx = a + bx;$$

und man wird dieses vermittelst einer der unbestimmten Größen a oder b genüge leisten können.

Wir wollen ferner $f'x = F'x$ annehmen, es ist klar daß, indem man in $a + bp$, p in x verwandelt, und

die erste Funktion nimmt, man $F'x = b$ haben wird; also $f'x = b$. Daher werden die Werthe von a und b durch diese zwey Bedingungen bestimmt seyn; denn man wird

$$b = f'x, \text{ und } a = fx - xf'x$$

haben. Die Gleichung der geraden Linie wird also

$$q = fx - xf'x + pf'x,$$

wo p und q die beyden Coordinaten sind, und die Abscisse x als beständig angesehn ist.

Ich behaupte jetzt, daß diese gerade Linie die Eigenschaft hat, daß keine andere gerade Linie zwischen ihr und der Curve gezogen werden kann.

Denn, es sey

$$s = \varphi r = g + hr$$

die Gleichung einer andern beliebigen geraden Linie (no. 110); soll diese durch denselben gemeinschaftlichen Punkt gehen, so muß man auch $\varphi x = fx$ haben; und damit sie zwischen der eben bestimmten Curve und geraden Linie durchgehet, so muß man noch $\varphi'x = fx'$ haben (no. 111). Diese zwey Bedingungen geben

$$g + hx = fx \text{ und } h = f'x.$$

Hieraus ziehet man für g und h dieselben Werthe die wir so eben für a und b gefunden haben; daher diese letztere gerade Linie mit der ersten zusammentreffen wird.

Die, durch die Gleichung

$q = a + bp$, oder $a = fx - xf'x$ und $b = f'x$

bestimmte gerade Linie wird also die Tangente von der durch die Gleichung $y = fx$ vorgestellten Curve seyn, an dem Punkt der die Abscisse $p = x$ entspricht (no. 108).

Weil $y = fx$, so wird man, zufolge der im ersten Theile gebrauchten Bezeichnung haben, $y' = f'x$; die

Aus-

Ausdrücke von a und b werden also viel einfacher

$$a = y - xy' \text{ und } b = y'$$ seyn.

114.

Es ist leicht in der Gleichung $q = a + bp$ für die gerade Linie zu sehen, daß b die Tangente von dem Winkel welchen diese gerade Linie mit der Axe macht, ausdrückt, und daß $-\frac{a}{b}$ die Abscisse ist, die denselben Punkt entspricht, wo dieselbe gerade Linie die Axe schneidet. Wenn also diese gerade Linie die Tangente der Curve an dem Punkt ist, wo $p = x$, so wird y' die Tangente des Winkels seyn, den sie mit der Axe macht, und $x + \frac{a}{b} = \frac{y}{y'}$ wird die sogenannte Subtangente seyn.

Wenn man ferner, durch $s = \alpha + \beta r$ eine andere gerade Linie vorstellt die durch denselben Punkt der Curve gehet, wo r und s die zwey Coordinaten dieser geraden Linie sind, so wird man für diesen Punkt

$$r = p = x, \; s = q = y \text{ haben;}$$

also

$$a + bx = \alpha + \beta x;$$

und wenn man verlangt, daß diese gerade Linie die erste unter einem Winkel schneiden soll, dessen Tangente m sey, so wird man da b und β die Tangenten den Winkel sind, welche diese zwey gerade Linien mit derselben Axe machen, durch die bekannten trigonometrischen Formeln

$$\beta = \frac{b + m}{1 - bm} \text{ haben;}$$

also

$\alpha =$

$$\alpha = a - \frac{x(1 + b^2)m}{1 - bm},$$

wo nur die Werthe von a und b zu ſubſtituiren ſind.

Will man daß dieſe zweyte gerade Linie ſenkrecht auf die Tangente ſtehen ſoll, ſo macht man $m = \infty$, d. h., $\frac{1}{m} = 0$, und man wird bloß haben:

$$\alpha = a + x(b + \frac{1}{b}) = y + \frac{x}{y'}$$

$$\text{und } \beta = -\frac{1}{b} = -\frac{1}{y'}.$$

Alſo wird $-\frac{1}{y'}$ die Tangente des Winkels ſeyn, welchen dieſe ſenkrechte Linie die man gemeiniglich Normale nennt, mit der Axe machen wird, und

$$x + \frac{\alpha}{\beta} = -yy'$$

wird derjenige Theil der Axe ſeyn, der zwiſchen den Punkt, wo ſie die Axe und Ordinate ſchneidet enthalten iſt, d. h. die Subnormale.

Wenn die beyden Coordinaten x, y der Curve, in Funktionen einer beliebigen dritten veränderlichen Größen ausgedrückt wären, und nimmt man x' und y' für die erſten Funktionen von x und y in Beziehung auf dieſer andern veränderlichen Größe, ſo wird alsdann nur in den vorhergehenden Formeln überall $\frac{y'}{x'}$ an der Stelle von von y' zu ſetzen ſeyn (no. 63).

Es wäre überflüſſig dieſe Formeln auf Beyſpiele anzuwenden; denn, wenn man nur die erſten Elemente des Differentialcalcul weiß, ſo kann man nicht fehlen die

Iden-

Identität der vorhergehenden Formeln mit den bekannten Differentialformeln wahrzunehmen.

115.

Wir wollen jetzt den Kreis nehmen um ihm mit der gegebenen Curve zu vergleichen. Die allgemeine Gleichung des Kreises, welche sich auf die rechtwinklichte Coordinaten p und q bezieht, ist

$$(p - a)^2 + (q - b)^2 = c^2,$$

wo a und b die dem Mittelpunkte entsprechende Coordinaten sind, und c der Halbmesser des Kreises. Daraus erhält man:

$$q = b + \sqrt{[c^2 - (p - a)^2]} = Fp; \qquad (1)$$

also

$$Fx = b + \sqrt{[c^2 - (x - a)^2]} \text{ und}$$

$$F'x = -\frac{x - a}{\sqrt{[c^2 - (x - a)^2]}}. \qquad (2)$$

Man mache also

$$Fx = fx = y, \text{ und } F'x = f'x = y',$$

und ziehe aus diesen Gleichungen die Werthe von a und b, die zweyte Gleichung giebt:

$$\sqrt{[c^2 - (x - a)^2]} = -\frac{x - a}{y'},$$

daraus folgt

$$x - a = \frac{cy'}{\sqrt{(1 + y'^2)}}.$$

ferner giebt die erste Gleichung

$$y - b = \sqrt{[c^2 - (x - a)^2]} = -\frac{x - a}{y'}$$

$$= -\frac{c}{\sqrt{(1 + y'^2)}};$$

a =

$$a = x - \frac{cy'}{\sqrt{(1 + y'^2)}}, \quad b = y + \frac{c}{\sqrt{(1 + y'^2)}}.$$

Sieht man den Halbmeſſer c als gegeben an, ſo bleibt keine willkührliche Größe mehr in der Gleichung; und man wird daraus ſchließen, daß der gegebene Kreis, deſſen Mittelpunkt durch die Coördinaten a und b beſtimmt iſt, ſo beſchaffen iſt, daß man zwiſchen ihm und der Curve keinen andern Bogen von denſelben Halbmeſſer der aber von jenem verſchieden gelegt wäre, ziehen könnte.

Denn, für einen andern Kreis deſſelben Halbmeſſers c, auf die Coördinaten r und s bezogen, und deſſen Coordinaten vom Mittelpunkte g und h wären, hätte man die Gleichung:

$$s = \phi r = h + \sqrt{[c^2 - (r - g)^2]};$$

und damit dieſer Kreis denſelben Punkt mit der gegebenen Curve gemein hat und zwiſchen dieſer Curve und den bereits beſtimmten Kreis durchgeſehen kann, ſo müßte man auch haben:

$$\phi x = fx = y \text{ und } \phi' x = f' x = y';$$

Gleichungen die die beyden Größen g und h zu beſtimmen dienen. Es iſt aber ſichtbar daß dieſe Gleichungen von derſelben Form ſind als die vorhergehenden, wo die Größen g und h an der Stelle von a und b ſtehen. Sie werden alſo für g und h dieſelben Werthe die man ſchon für a und b gefunden hat, geben; folglich wird der neue Kreis mit jenem aus dieſen Werthen beſtimmten, zuſammenfallen.

Nach denſelben Begriffen der Tangenten, wird alſo, der Kreis vom Halbmeſſer c, deſſen Mittelpunkt durch die Coordinaten a und b beſtimmt ſeyn wird, der gegebenen Curve deren Coordinaten x und y ſind, berühren.

Da dieſe Concluſion ſtatt hat, was auch immer der Werth vom Halbmeſſer c ſeyn mag, ſo kann man c in den Ausdrücken von a und b als unbeſtimmt anſehen; alsdann werden dieſe Coordinaten a und b einer geraden Linie angehören, deren Gleichung aus der Eliminirung von c entſtehet, und die demnach ſeyn wird:

$$b = y + \frac{x - a}{y'}.$$

Dieſe gerade Linie wird alſo der Ort der Mittelpunkte von allen Kreiſen ſeyn, die die Curve berühren können; ſie wird alſo auf der Curve Normal ſeyn. Man ſieht in der That, daß die Gleichung dieſer geraden Linie, wo a und b die Coordinaten ſind, mit der oben (no. 114.) für die Normale gefundenen Gleichung zuſammentrifft.

116.

Jetzt kann man unter den verſchiedenen Kreiſen, die den Bedingungen

$$Fx = fx = y, \quad F'x = f'x = f'x = y'$$

befriedigen, einen finden der um ſo mehr der Bedingung

$$F''x = f''x = y''$$

genüge leiſtet.

In der That, nachdem man oben

$$F'x = -\frac{x - a}{\sqrt{[c^2 - (x - a)^2]}}$$

gefunden hat, ſo wird man daraus ableiten:

$$F''x = -\frac{c^2}{[c^2 - (x - a)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Man wird daher folgende Gleichung haben

$$y''$$

$$=$$

$$y'' = \frac{c^2}{[c^2-(x-a)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Man hat aber bereits an demſelben Orte gefun

$$\sqrt{[c^2-(x-a)^2]} = \frac{x-a}{y'} = -\frac{c}{\sqrt{(1+}}$$

Man wird wird alſo haben:

$$y'' = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{c}; \text{ u. daraus } c = \frac{(1+}{y'}$$

Setzen wir dieſe Werthe in den Ausdrück
und b, ſo hat man:

$$a = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad b = y + \frac{1+}{}$$

Wenn auf dieſe Art die drey beſtändige G
b, c, welche in der allgemeinen Gleichung des
verkommen beſtimmt ſind, ſo kann man daraus
daß kein anderer Kreis, zwiſchen der gegebenen
und dem durch dieſe Werthe von a, b, c beſtimmte
durchgehen kann. In der That, damit eine
Curve die auf die Coordinaten r, s bezogen un
die Gleichung $s = \varphi r$ vorgeſtellt iſt, zwiſchen de
und den beſagten Kreis durchgehen kann, ſo müß
haben:

$$\varphi x = fx = y, \quad \varphi' x = f' x = y'$$
und $\varphi'' x = f'' x = y''$ (no. 111).

Wenn nun dieſe Curve ein Kreis iſt, und
Größen g, h, k, an die Stelle von a, b, c, nim
wird man φx, $\varphi' x$, $\varphi'' x$ dieſelben Ausdrücke hab
für Fx, $F'x$, $F''x$, indem man nur in dieſe hier
ſtatt a, b, c, ſetzt. Die drey die man alſo für
ſtimmung von g, h, k, haben wird, werden dieſelb
als diejenigen, durch welche man a, b, c, beſtim

folglich wird der neue Kreis, welcher zwischen der Cur-
e und dem bereits bestimmten Kreis durchgehen sollte,
it diesem hier zusammenfallen, und mit ihm nur einen
inzigen ausmachen.

Dieser Kreis, wird also in Beziehung auf Kreise, die-
lbe Eigenschaft haben, als die Tangente in Hinsicht auf
rade Linien; und dieses nennen die Geometer Berüh-
ungskreis oder Krümmungskreis weil er die
rümmung der Curve zu messen dient.

Die Größe c wird der Halbmesser dieses Kreises seyn.
nn man kurz den Krümmungshalbmesser nennt,
id die Größen a, b werden die Coordinaten von der
rve seyn, die der Ort von allen Mittelpunkten dieser
reise seyn wird.

117.

Jetzt kann man diese Theorie auf eine weit allgemei-
re Art darstellen.

Es seyen x, y die Coordinaten der gegebenen belie-
gen Curve, und p, q die Coordinaten von der Curve,
elche man mit ihr vergleichen will, und die als gegeben
ngenommen wird.

Gesetzt die Gleichung dieser Curve enthielte, nebst
en veränderlichen Größen p und q, noch beständige un-
estimmte Größen a, b, c, etc. und sey vorgestellt durch

$$F(p, q, a, b, c \ldots) = 0.$$

Wenn man in dieser Gleichung p in x, q in y ver-
ndert, so hat man:

$$F(x, y, a, b, c \ldots) = 0,$$

ine Gleichung die die nöthige Bedingung giebt, damit
ie gegebene Curve mit der vorgegebenen Curve einen
unkt gemein habe.

$\varphi'x = f'x$ und $\varphi''x = f''x$ hätte.

Auf eben die Art wird man beweisen, daß, wenn man für die beyden ersten Curven

$f'x = F'x$, $f''x = F''x$, und $f'''x = F'''x$,

hat, die dritte Curve nicht zwischen den beyden ersten gezogen werden könnte, es sey denn, daß man auch

$\varphi'x = f'x$, $\varphi''x = f''x$, $\varphi'''x = f'''x$

hätte, u. s. w.

112.

Man kann hieraus allgemein schließen, daß, wenn man eine beliebige Curve hat, und eine andere Curve mit dieser einen Punkt gemein hätte, welches erfordert, daß ihre Ordinaten für die nemliche Abscisse i, ferner auch die ersten Funktionen dieser Ordinaten für die nemliche gemeinschaftliche Abscisse gleich seyn, alsdann es unmöglich seyn wird, daß irgend eine andere Curve, welche man durch diesen gemeinschaftlichen Punkt führen würde, zwischen beyden Curven durchginge, wenn nicht etwa die erste Funktion von ihrer Ordinate für die nemliche Abscisse auch den ersten Funktionen von ihren Ordinaten gleich ist.

Und wenn außer den ersten Funktionen dieser Ordinaten ihre zweyten Funktionen für die nemliche Abscisse auch gleich wären, alsdann würde es unmöglich seyn, daß irgend eine andere Curve, die durch den gemeinschaftlichen Punkt ginge, auch zwischen den beyden Curven durchliefe, es sey denn, daß die ersten und zweyten Funktionen von ihrer Ordinate, respective den ersten und zweyten Funktionen der gemeinschaftlichen Ordinate beyder Curven gleich wären, und so von den übrigen.

Eigentlich

Eigentlich zu reden, treffen diese Curven nur in dem Punkt, wo die Ordinaten gleich sind zusammen, und die Gleichheit der ersten, zweyten Funktionen u. s. w. dieser Ordinaten, macht sie nicht in andern Punkten zusammentreffend, sondern sie läßt sie sich solchergestalt nähern, daß eine andere Curve, für welche dieselbe Gleichheit statt haben würde, zwischen ihnen durchgehen könne.

Dieses ist der reine Begriff, welche man sich von diesen verschiedenen Graden der Näherung der Curven machen muß, welchen man gemeiniglich **Berührung** (contact, osculation &c.) nennt, und welche die gewöhnliche Art, den Differentialcalcul abzufassen, als mehr oder weniger strenge, oder als mehr oder weniger ausgedehnte Zusammentreffungen ansehen läßt.

§13.

Wenn man eine beliebige Curve hat die durch die Gleichung $y = fx$ vorgestellt ist, so vergleiche man sie sogleich mit einer beliebigen geraden Linie. Weil wir allgemein durch $q = Fp$ die Gleichung der Curve, mit welcher man die gegebene vergleichen will, vorgestellt haben (no. 109), so wird man für die gerade Linie haben

$$Fp = a + bp,$$

wo a und b zwey beständige Größen sind, welche die Lage dieser geraden Linie bestimmen.

Die Bedingung eines gemeinschaftlichen Punkts giebt sogleich

$$fx = Fx = a + bx;$$

und man wird dieses vermittelst einer der unbestimmten Größen a oder b genüge leisten können.

Wir wollen ferner $f'x = F'x$ annehmen, es ist klar daß, indem man in $a + bp$, p in x verwandelt, und

die erste Funktion nimmt, man $F'x = b$ haben wird; also $f'x = b$. Daher werden die Werthe von a und b durch diese zwey Bedingungen bestimmt seyn; denn man wird

$$b = f'x, \text{ und } a = fx - xf'x$$

haben. Die Gleichung der geraden Linie wird also

$$q = fx - xf'x + pf'x,$$

wo p und q die beyden Coordinaten sind, und die Abscisse x als beständig angesehn ist.

Ich behaupte jetzt, daß diese gerade Linie die Eigenschaft hat, daß keine andere gerade Linie zwischen ihr und der Curve gezogen werden kann.

Denn, es sey

$$s = \varphi r = g + hr$$

die Gleichung einer andern beliebigen geraden Linie (no. 110); soll diese durch denselben gemeinschaftlichen Punkt gehen, so muß man auch $\varphi x = fx$ haben; und damit sie zwischen der eben bestimmten Curve und geraden Linie durchgehet, so muß man noch $\varphi'x = fx'$ haben (no. 111). Diese zwey Bedingungen geben

$$g + hx = fx \text{ und } h = f'x.$$

Hieraus ziehet man für g und h dieselben Werthe die wir so eben für a und b gefunden haben; daher diese letztere gerade Linie mit der ersten zusammentreffen wird.

Die, durch die Gleichung

$q = a + bp$, oder $a = fx - xf'x$ und $b = f'x$

bestimmte gerade Linie wird also die Tangente von der durch die Gleichung $y = fx$ vorgestellten Curve seyn, an dem Punkt der die Abscisse $p = x$ entspricht (no. 108).

Weil $y = fx$, so wird man, zufolge der im ersten Theile gebrauchten Bezeichnung haben, $y' = f'x$; die

Aus-

Ausdrücke von a und b werden also viel einfacher

$$a = y - xy' \text{ und } b = y'$$ seyn.

114.

Es ist leicht in der Gleichung $q = a + bp$ für die gerade Linie zu sehen, daß b die Tangente von dem Winkel welchen diese gerade Linie mit der Axe macht, ausdrückt, und daß $-\frac{a}{b}$ die Abscisse ist, die denselben Punkt entspricht, wo dieselbe gerade Linie die Axe schneidet. Wenn also diese gerade Linie die Tangente der Curve an dem Punkt ist, wo $p = x$, so wird y' die Tangente des Winkels seyn, den sie mit der Axe macht, und $x + \frac{a}{b} = \frac{y}{y'}$ wird die sogenannte Subtangente seyn.

Wenn man ferner, durch $s = \alpha + \beta r$ eine andere gerade Linie vorstellt die durch denselben Punkt der Curve gehet, wo r und s die zwey Coordinaten dieser geraden Linie sind, so wird man für diesen Punkt

$$r = p = x, \; s = q = y \text{ haben;}$$

also

$$a + bx = \alpha + \beta x;$$

und wenn man verlangt, daß diese gerade Linie die erste unter einem Winkel schneiden soll, dessen Tangente m sey, so wird man da b und β die Tangenten den Winkel sind, welche diese zwey gerade Linien mit derselben Axe machen, durch die bekannten trigonometrischen Formeln

$$\beta = \frac{b + m}{1 - bm} \text{ haben;}$$

also

$\alpha =$

$$\alpha = a - \frac{x(1 + b^2)m}{1 - bm},$$

wo nur die Werthe von a und b zu substituiren sind.

Will man daß diese zweyte gerade Linie senkrecht auf die Tangente stehen soll, so macht man $m = \infty$, d. h. $\frac{1}{m} = 0$, und man wird bloß haben:

$$\alpha = a + x(b + \frac{1}{b}) = y + \frac{x}{y'}$$

$$\text{und } \beta = -\frac{1}{b} = -\frac{1}{y'}.$$

Also wird $-\frac{1}{y'}$ die Tangente des Winkels seyn, welchen diese senkrechte Linie die man gemeiniglich Normale nennt, mit der Axe machen wird, und

$$x + \frac{\alpha}{\beta} = -yy'$$

wird derjenige Theil der Axe seyn, der zwischen den Punkt, wo sie die Axe und Ordinate schneidet enthalten ist, d. h. die Subnormale.

Wenn die beyden Coordinaten x, y der Curve, in Funktionen einer beliebigen dritten veränderlichen Größen ausgedrückt wären, und nimmt man x' und y' für die ersten Funktionen von x und y in Beziehung auf dieser andern veränderlichen Größe, so wird alsdann nur in den vorhergehenden Formeln überall $\frac{y'}{x'}$ an der Stelle von von y' zu setzen seyn (no. 63).

Es wäre überflüssig diese Formeln auf Beyspiele anzuwenden; denn, wenn man nur die ersten Elemente des Differentialcalcul weiß, so kann man nicht fehlen die

Iden-

Identität der vorhergehenden Formeln mit den bekannten Differentialformeln wahrzunehmen.

115.

Wir wollen jetzt den Kreis nehmen um ihm mit den gegebenen Curve zu vergleichen. Die allgemeine Gleichung des Kreises, welche sich auf die rechtwinklichte Coordinaten p und q bezieht, ist

$$(p - a)^2 + (q - b)^2 = c^2,$$

wo a und b die dem Mittelpunkte entsprechende Coordinaten sind, und c der Halbmesser des Kreises. Daraus erhält man:

$$q = b + \sqrt{[c^2 - (p - a)^2]} = Fp; \qquad (1)$$

also

$$Fx = b + \sqrt{[c^2 - (x - a)^2]} \text{ und}$$

$$F'x = -\frac{x - a}{\sqrt{[c^2 - (x - a)^2]}}. \qquad (2)$$

Man mache also

$$Fx = fx = y, \text{ und } F'x = f'x = y',$$

und ziehe aus diesen Gleichungen die Werthe von a und b, die zweyte Gleichung giebt:

$$\sqrt{[c^2 - (x - a)^2]} = -\frac{x - a}{y'},$$

daraus folgt

$$x - a = -\frac{cy'}{\sqrt{(1 + y'^2)}}.$$

Ferner giebt die erste Gleichung

$$y - b = \sqrt{[c^2 - (x - a)^2]} = -\frac{x - a}{y'}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{(1 + y'^2)}};$$

also

$$a =$$

$$a = x - \frac{cy'}{\sqrt{(1 + y'^2)}}, \quad b = y + \frac{c}{\sqrt{(1 + y'^2)}}.$$

Sieht man den Halbmesser c als gegeben an, so bleibt keine willkührliche Größe mehr in der Gleichung; und man wird daraus schließen, daß der gegebene Kreis, dessen Mittelpunkt durch die Coördinaten a und b bestimmt ist, so beschaffen ist, daß man zwischen ihm und der Curve keinen andern Bogen von denselben Halbmesser der aber von jenem verschieden gelegt wäre, ziehen könnte.

Denn, für einen andern Kreis desselben Halbmessers c, auf die Coördinaten r und s bezogen, und dessen Coordinaten vom Mittelpunkte g und h wären, hätte man die Gleichung:

$$s = \phi r = h + \sqrt{[c^2 - (r - g)^2]};$$

und damit dieser Kreis denselben Punkt mit der gegebenen Curve gemein hat und zwischen dieser Curve und den bereits bestimmten Kreis durchgesehen kann, so müßte man auch haben:

$$\phi x = fx = y \text{ und } \phi' x = f' x = y';$$

Gleichungen die die beyden Größen g und h zu bestimmen dienen. Es ist aber sichtbar daß diese Gleichungen von derselben Form sind als die vorhergehenden, wo die Größen g und h an der Stelle von a und b stehen. Sie werden also für g und h dieselben Werthe die man schon für a und b gefunden hat, geben; folglich wird der neue Kreis mit jenem aus diesen Werthen bestimmten, zusammenfallen.

Nach denselben Begriffen der Tangenten, wird also, der Kreis vom Halbmesser c, dessen Mittelpunkt durch die Coordinaten a und b bestimmt seyn wird, der gegebenen Curve deren Coordinaten x und y sind, berühen.

Da

Da dieſe Concluſion ſtatt hat, was auch immer der Werth vom Halbmeſſer c ſeyn mag, ſo kann man c in den Ausdrücken von a und b als unbeſtimmt anſehen; alsdann werden dieſe Coordinaten a und b einer geraden Linie angehören, deren Gleichung aus der Eliminirung von c entſtehet, und die demnach ſeyn wird:

$$b = y + \frac{x - a}{y'}.$$

Dieſe gerade Linie wird alſo der Ort der Mittelpunkte von allen Kreiſen ſeyn, die die Curve berühren können; ſie wird alſo auf der Curve Normal ſeyn. Man ſieht in der That, daß die Gleichung dieſer geraden Linie, wo a und b die Coordinaten ſind, mit der oben (no. 114.) für die Normale gefundenen Gleichung zuſammentrifft.

116.

Jetzt kann man unter den verſchiedenen Kreiſen, die den Bedingungen

$$Fx = fx = y, \quad F'x = f'x = f'x = y'$$

befriedigen, einen finden der um ſo mehr der Bedingung

$$F''x = f''x = y''$$

Genüge leiſtet.

In der That, nachdem man oben

$$F'x = -\frac{x - a}{\sqrt{[c^2 - (x - a)^2]}}$$

gefunden hat, ſo wird man daraus ableiten:

$$F''x = -\frac{c^2}{[c^2 - (x - a)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Man wird daher folgende Gleichung haben

$$y''$$

$$y'' = \frac{c^2}{[c^2 - (x-a)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Man hat aber bereits an demſelben Orte gefunden:

$$\sqrt{[c^2 - (x-a)^2]} = \frac{x-a}{y'} = -\frac{c}{\sqrt{(1+y'^2)}}.$$

Man wird wird alſo haben:

$$y'' = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{c}; \text{ u. daraus } c = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Setzen wir dieſe Werthe in den Ausdrücken von a und b, ſo hat man:

$$a = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad b = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Wenn auf dieſe Art die drey beſtändige Größen a, b, c, welche in der allgemeinen Gleichung des Kreiſes vorkommen beſtimmt ſind, ſo kann man daraus ſchließen daß kein anderer Kreis, zwiſchen der gegebenen Curve und dem durch dieſe Werthe von a, b, c beſtimmten Kreis, durchgehen kann. In der That, damit eine beliebige Curve die auf die Coordinaten r, s bezogen und durch die Gleichung $s = \varphi r$ vorgeſtellt iſt, zwiſchen der Curve und den beſagten Kreis durchgehen kann, ſo müßte man haben:

$$\phi x = fx = y, \quad \phi' x = f' x = y'$$

und $\phi'' x = f'' x = y''$ (no. 111).

Wenn nun dieſe Curve ein Kreis iſt, und man die Größen g, h, k, an die Stelle von a, b, c, nimmt, ſo wird man ϕx, $\phi' x$, $\phi'' x$ dieſelben Ausdrücke haben, als für Fx, $F'x$, $F''x$, indem man nur in dieſe hier g, h, k ſtatt a, b, c, ſetzt. Die drey die man alſo für die Beſtimmung von g, h, k, haben wird, werden dieſelben ſeyn als diejenigen, durch welche man a, b, c, beſtimmt hat.

Folg-

folglich wird der neue Kreis, welcher zwischen der Cur-
e und dem bereits bestimmten Kreis durchgehen sollte,
mit diesem hier zusammenfallen, und mit ihm nur einen
inzigen ausmachen.

Dieser Kreis, wird also in Beziehung auf Kreise, die-
elbe Eigenschaft haben, als die Tangente in Hinsicht auf
erade Linien; und dieses nennen die Geometer Berüh-
ungskreis oder Krümmungskreis weil er die
rümmung der Curve zu messen dient.

Die Größe c wird der Halbmesser dieses Kreises seyn,
enn man kurz den Krümmungshalbmesser nennt,
nd die Größen a, b werden die Coordinaten von der
urve seyn, die der Ort von allen Mittelpunkten dieser
reise seyn wird.

117.

Jetzt kann man diese Theorie auf eine weit allgemei-
re Art darstellen.

Es seyen x, y die Coordinaten der gegebenen belie-
gen Curve, und p, q die Coordinaten von der Curve,
elche man mit ihr vergleichen will, und die als gegeben
genommen wird.

Gesetzt die Gleichung dieser Curve enthielte, nebst
en veränderlichen Größen p und q, noch beständige un-
estimmte Größen a, b, c, etc. und sey vorgestellt durch

$$F(p, q, a, b, c \ldots) = 0.$$

Wenn man in dieser Gleichung p in x, q in y ver-
ndert, so hat man:

$$F(x, y, a, b, c \ldots) = 0,$$

ine Gleichung die die nöthige Bedingung giebt, damit
ie gegebene Curve mit der vorgegebenen Curve einen
unkt gemein habe.

Wir wollen zur Berührungscurve einen Kreis nehmen, deſſen allgemeinſte Gleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - c^2 = 0 \text{ iſt,}$$

ſo wird er nur einer Berührung der zweyten Ordnung fähig ſeyn, weil nur drey Elemente a, b, c da ſind. Man wird alſo dieſe Elemente durch die drey Gleichungen

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - c^2 = 0, \quad x - a + (y - b)y' = 0$$

und $1 + (y - b)y'' + y'^2 = 0$

beſtimmen, von denen die zweyte und dritte, die erſte und zweyte, Gleichungen von der erſten ſind. Aus dieſen Gleichungen folgt ſogleich

$$y - b = -\frac{1 + y'^2}{y''}, \quad x - a = \frac{(1 + y'^2)y'}{y''},$$

$$c = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}{y''} \text{ wie oben (no. 116).}$$

Wenn man die Gleichung der Parabel nimmt:

$$y = a + bx + cx^2,$$

welche auch nur drey willkührliche beſtändige Größen hat, ſo wird man eben ſo, für die Beſtimmung dieſer beſtändigen Größen, wenn man ſie als die Elemente einer Berührung der zweyten Ordnung anſieht, die Gleichungen haben:

$$y - a - bx - cx^2 = 0; \quad y' - b - 2ex = 0,$$

$$y'' - 2c = 0,$$

welche

$$c = \frac{y''}{2}, \quad b = y' - xy'',$$

$$a = y - xy' + \frac{x^2y''}{2}.$$

geben.

Wenn

Wenn man aber die Gleichung der cubiſchen Parabel nimmt:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

ſo könnte ſie eine Berührung der dritten Ordnung haben, deren Elemente a, b, c, d wären, und die durch die Gleichungen

$$y - a - bx - cx^2 - dx^3 = 0,$$
$$y' - b - 2cx - 3dx^2 = 0,$$
$$y'' - 2c - 6dx = 0,$$
$$y''' - 6d = 0,$$

beſtimmt würden. Man hätte alſo

$$d = \frac{y'''}{6},$$
$$c = \frac{y''}{2} - \frac{xy'''}{2},$$
$$b = y' - xy'' + \frac{xy'''}{2},$$
$$a = y - xy' + \frac{x^2y''}{2} - \frac{x^3y'''}{6}.$$

und ſo weiter.

119.

Wenn man endlich die aller einfachſte Curve verlangte die mit einer vorgegebenen Curve eine Berührung von einer beliebigen Ordnung m hätte, ſo nehme man x und y als Abſciſſe und Ordinate der vorgegebenen Curve, p und q für die der geſuchten Curve, und ſehe y als Funktion von x und q als Funktion von p an, und mache

$$q = y + (p-x)y' + \frac{(p-x)^2}{2}y'' + \frac{(p-x)^3}{2.3}y''' +$$

u. ſ. w.

indem man in der 2ten Hälfte so viel Glieder nimmt als Einheiten in $m + 1$ sind.

Denn, indem man die abgeleiteten Gleichungen in Beziehung auf p nimmt, und nachher $p = x$ macht, so wird man $q = y$, $q' = y'$, $q'' = y''$, u. s. w. haben, bis $q^m = y^m$. Diese beyden Curven werden in dem gemeinschaftlichen Punkt, der $p = x$ zugehört, die nöthigen Bedingungen für eine Berührung der Ordnung m haben (Nr. 112 und 117).

Die durch die vorhergehende Gleichung dargestellte Curve, ist wie man siehet, paraboliſchen Geschlechts und wird also in dem gemeinschaftlichen Punkt der vorgegebenen Curve, den sich den Lauf dieser Curve am meisten nähernden Lauf haben, dergestalt, daß keine andere Curve desselben Geschlechts zwischen beyden durchgehen kann, wenn sie nicht um ein Grad höher ist.

120.

Die Theorie, die wir so eben über die Berührung der Curven gegeben haben, ist nur eine Folge von der allgemeinen Theorie der Entwickelung der Funktionen, welche im ersten Theile abgehandelt ist. Aber wir haben (Nr. 40 ꝛc.) gesehen, daß es particulaire Fälle giebt, wo diese Entwickelung der allgemeinen Form entweicht, und daß diese Fälle diejenigen sind, wo ein gegebener Werth von x die abgeleiteten Funktionen $f'x$, $f''x$, u. s. w. unendlich macht. Alsdenn enthält die Entwickelung von $f(x + i)$ nothwendig, für diesen Werth von x, andere Potenzen von i als die einfachen Potenzen i, i^2, u. s. w. und die Analysis von Nr. 110 und 111 ist hier nicht anwendbar. Obgleich diese Ausnahmen der allgemeinen Theorie nichts schaden, so ist es doch nothwendig, um

nichts

ichts zu wünschen übrig zu lassen, zu sehen wie diese heorie in den genannten particulairen Fällen modificirt erden muß.

Wenn man $x = m$ macht, und die Funktion $f(x+i)$ n einer nach i steigenden Reihe entwickelt, so wollen wir nnehmen, diese Reihe habe folgende Form:

$fm + Ai^{\lambda} + Bi^{\lambda+\mu} + Ci^{\lambda+\mu+\nu} +$ u. s. w. wo μ, u. s. w. immer positive Zahlen sind.

Ich bemerke sogleich, daß man die Coeffizienten A, B, u. s. w., sowohl als die Exponenten λ, μ, ν, u. s. w. urch eine ähnliche Methode als in no. 11 finden kann.

Man mache sogleich

$$f(m+i) = fm + i^{\lambda} P,$$

nd nehme für i^{λ} die höchste Potenz von i, die $f(m+i) - fm$, nach den gehörigen Reductionen divi- irt, damit der Quotient P, für $i = o$, weder Null noch nendlich wird.

Wenn $m = o$, so kann der Exponent λ negativ seyn; i jedem andern Falle, wird er augenscheinlich immer po- iv seyn.

Ferner macht man

$$P = A + i^{\mu} Q,$$

o A den Werth von P für $i = o$ ist, und nimmt r i^{μ} die höchste positive Potenz von i, die $P - A$ di- idirt, damit der Quotient Q, für $i = o$, weder Null ch unendlich wird.

Man fährt fort, indem man annimmt

$$Q = B + i^{\nu} R,$$

o B der Werth von Q, für $i = o$, und i^{ν} die höchste sitive Potenz von i ist, die $Q - B$ dividirt, so daß der Quotient für $i = o$, weder Null noch unendlich wird; u. s. w.

Auf diese Art hat man:

$$f(m + i) = fm + i^{\lambda} P$$
$$= fm + i^{\lambda} A + i^{\lambda+\mu} Q$$
$$= fm + i^{\lambda} A + i^{\lambda+\mu} B + i^{\lambda+\mu+\nu}$$

u. s. w.

Man hat, um die auf einander folgenden Gli einer Reihe zu finden, kürzere Methoden oder einen l tern Calcul, aber die vorhergehende Methode hat Vorzug die Reihe nur so weit zu entwickeln als will, und den Werth des Restes anzugeben. Für ur Zweck werden wir nicht nöthig haben, diese Reste zu nen, es wird uns genügen zu wissen, daß sie immer d Größen von der eben gefundenen Form ausgedrückt den können.

Dieses voraus gesetzt, wollen wir die durch (chung $y = f x$, vorgestellte Curve betrachten, wo x Abscisse und y die Ordinate ist. Wir wollen annehmen sie mit einer andern Curve deren Ordinate $F x$ ist, e Punkt gemein habe, und daß dieser Punkt der Absci entspricht, so daß man $F m = f m$ hat. Ueber d Punkt hinaus werden die Ordinaten dieser beyden ven, für eine beliebige Abcisse $m + i$ seyn, $f(m +$ $F(m + i)$; und ihr Unterschied, den ich mit D zeichne, wird seyn:

$$D = f(m + i) - F(m + i.)$$

Wir wollen die Funktion $F(m + i)$, wie die F tion $f(m + i)$ entwickeln, und es sey

$$F(m + i) = Fm + i^{\varepsilon} p,$$
$$p = \varepsilon + i^{\sigma} q,$$
$$q = \varepsilon + i^{\tau} r,$$

u. s. w.

wo r, τ, u. ſ. w. poſitive Zahlen ſind, und α, β, u. ſ. w. ſind die Werthe von p, q u. ſ. w. wenn i = o iſt. Weſen $Fm = fm$, wird man ſogleich haben;

$$P = i^{\lambda} A - i^{\varrho} \alpha + i^{\lambda+\mu} Q - i^{\varrho+\sigma} q.$$

ie beyden erſten Glieder der Entwickelung von $f(m+i)$ aren $fm + i^{\lambda} A$, und die beyden erſten Glieder der Entickelung von $F(m+i)$ ſind; $Fm + i^{\varrho} \alpha$,

ir wollen annehmen ſie werden gleich, ſo daß man $\varrho = \lambda$ nd $\alpha = A$ hat; die erſte dieſer zwey Bedingungen wird on der Natur der durch f und F bezeichneten Funktioen abhangen, aber die zweyte wird immer, wie die Bedingung $Fm = fm$ erfüllt werden können, nemlich vermittelſt der beſtändigen willkührlichen Größen a, b, c . ſ. w. die ſich in der Funktion Fx vorfinden.

Man wird alſo in dieſem Falle haben:

$$P = i^{\lambda+\mu} Q - i^{\varrho+\sigma} q;$$

nd es wird unmöglich ſeyn, daß irgend eine andere Curve zwiſchen den beyden genannten Curven durchgehen kann, emlich durch denſelben Punkt der der Abſciſſe m entricht, wenn nicht etwa die beyden erſten Glieder der ntwickelung von $\varphi(m + i)$, wo φx die Ordinate dier andern Curve iſt, auch dieſelben, wie die der Entickelung von $f(m + i)$, ſind.

Denn wären ſie unterſchieden, ſo könnten ſie ſich nicht i dem Ausdrucke von der Differenz Δ der beyden Ordinaten $(m + i)$ und $\varphi(m + i)$, vernichten, und man würe wegen $\varphi m = fm$ durch die angenommene Bedingung es Zuſammentreffens der Curven in dem Punkte, welher $x = m$ entſpricht, im allgemeinen haben:

$$\Delta = i^{\lambda} A - i^{\varrho} \alpha + i^{\lambda+\mu} Q + i^{\varrho+\sigma} u,$$

Wird dieser Ausdruck von △ mit dem von

$$D = i^{\lambda+\mu} Q - i^{\varepsilon+\sigma} q$$

verglichen, so ist es leicht zu sehen, daß, da die Exponenten μ, σ, ε durch die Natur der Entwickelung nothwendig positiv sind, es allezeit möglich sey, i klein genung zu nehmen, damit der Werth von △ den Werth von D übertreffe, von den Zeichen abstrahirt, so lange man nicht $\varepsilon = \lambda$ und $\alpha = A$ hat, wie in den beyden ersten Curven. Also in jedem andern Falle wird die dritte Curve nothwendig außerhalb der beyden andern Curven ihren Lauf nehmen.

Wenn man die Entwickelung der Funktionen $f(m+i)$ und $F(m+i)$ weiter treibt, so wird man auf gleiche Art darthun, daß, wenn die drey ersten Glieder der Entwickelung dieser Funktionen dieselben sind, keine andere Curve zwischen ihnen durchgehen könnte, wenn sie nicht auch dieselben Glieder mit jenen gemein hätte, u. s. w.

Man könnte also auch, wie in Nr. 117. Berührung der ersten Ordnung, der zweyten, u. s. w diejenige Näherung der beyden Curven nennen, für welche die beyden ersten Glieder, oder die drey ersten, oder, u. s. w. in der Entwickelung der Funktionen, welche die Ordinaten vorstellen, dieselben seyn werden.

Wenn also die Curve deren Gleichung $y = fx$ gegeben ist, so wird, die einfachste Curve, welche mit ihr an dem Punkte wo $x = m$ ist eine Berührung der ersten Ordnung hat, durch die Gleichung.

$$y = fm + A(x-m)^{\lambda}$$

vorgestellt; und diejenige, welche eine Berührung der zweyten Ordnung haben wird, durch

$y =$

$y = fm + A(x - m)^{\lambda} + B(x - m)^{\lambda+\mu}$
ɛgeſtellt; u. ſ. w.

Denn wenn man $m + i$ für x ſubſtituirt, ſo wird an bloß die beyden erſten Glieder

$$fm + Ai^{\lambda}$$

)er die drey erſten

$$fm + Ai^{\lambda} + Bi^{\lambda+\mu},$$

der u. ſ. w. der Entwickelung von $f(m + i)$ haben.

Dieſe Curven hätten alſo auch in denſelben Punkt, en ſich dem Laufe der vorgegebenen Curve, am meiſten ähernden Lauf, und könnten folglich dazu dienen von er vorgegebenen Curve die Eigenſchaften kennen zu leh- n, wie die beſondern (ſinguliers) Punkte, die Wieder- hrungspunkte (les points de rebrousement) u. ſ. w; orüber man die Analyſe des Lignes courbes von Cra- er nachſehen kann.

121.

Wir wollen jetzt annehmen, daß man, in der Glei-)ung $y = fx$ der vorgegebenen Curve, $\frac{I}{i}$ an der Stel- von x ſetzte, und daß man die Funktion fx in einer eigenden Reihe von der Form

$$Ai^{\lambda} + Bi^{\lambda+\mu} + Ci^{\lambda+\mu+\nu} + \text{u. ſ. w.}$$

ıtwickelte.

Macht man daſſelbe für die Gleichung $y = Fx$ einer ndern Curve, und die erſten Glieder der Entwicke- ıng von $F\frac{I}{i}$ dieſelben ſeyen, als die der Entwickelung)n $f\frac{I}{i}$, ſo könnte man durch ein ähnliches Raiſonne-

ment

ment wie oben beweiſen, daß man immer i klein genug nehmen könnte, damit keine andere Curve, welche durch die Gleichung $y = \varphi x$ vorgeſtellt und deren Funktion $\varphi\frac{1}{i}$ ebenfalls in einer ſteigenden Reihe entwickelt iſt, und nicht eben ſo viel identiſche Glieder mit die der Curve hätte, nicht zwiſchen denſelben Curven in den Punkten, die der Abſciſſe $x = \frac{1}{i}$ und allen größeren Abſciſſen bis ins Unendliche entſprechen, durchgehen könne, weil, ſobald als die Bedingung die verhindern kann, daß dieſe Curve nicht zwiſchen den beyden andern durchgeht, für einen gewiſſen Werth von i ſtatt findet, ſie um ſo mehr für alle noch kleinere Werthe von i ſtatt finden muß.

Hieraus kann man ſchließen, daß die Curve deren Gleichung bloß

$$y = Ax^{-\lambda}, \text{ oder } y = Ax^{-\lambda} + Bx^{-\lambda-\mu};$$

iſt, oder u. ſ. w. ſich beſtändig der vorgegebenen Curve nähern wird, in dem Maaße als die Abciſſen x größer werden, aber ohne ſie je erreichen zu können, dergeſtalt daß ſie durch ein durchgegangenes Glied kommen wird, welches keine andre Curve deſſelben parabeliſchen, oder hyperboliſchen Geſchlechts, die nicht um ein Grad höher wäre, zwiſchen beyden Curven durch gehen könnte. Dieſe zweyte Curve wird alſo eine Aſymtote von der erſten ſeyn; und dieſe Idee von der Aſymtote ſcheint mir die einfachſte und die allgemeinſte die man davon geben könnte, da ſie zugleich auch die ſchicklichſte iſt, die Natur der Näherung, die das wahre aſymtotiſche ausmacht, zu caracteriſiren.

122.

Die Probleme welche man über die Tangenten, die ümmungshalbmesser u. s. w. und überhaupt über die erührungen der Curven aufwerfen kann, sind von zweyer y Art, directe oder umgekehrt. Die directen Proble- e reduciren sich immer dahin, einige Elemente der Berüh- ng von einer gewissen Ordnung zu finden (Nr. 117), id da sie einzig von der directen Analysis der Funktio- n abhängen, so sind sie immer analytisch aufzulösen. n den umgekehrten Problemen, nimmt man an, daß ne gegebene Beziehung zwischen einige dieser Elemente nd der Coordinaten x, y mit den abgeleiteten Funktio- en y′, y″, u. s. w. statt findet; und diese Beziehung ird, (wenn man darin die allgemeinen Ausdrücke der lemente in x, y, y′, y″, u. s. w. setzt) eine abgeleitete leichung einer gewissen Ordnung, von welcher man die sprüngliche Gleichung finden muß, um die der gesuchten urve in x und y zu haben. Diese Probleme führen al- nmittelbar zu abgeleiteten Gleichungen, und ihre Auf- sung hängt nothwendig von der umgekehrten Analysis r Funktionen ab, und ist allen Schwierigkeiten dieser nalysis unterworfen.

Indessen giebt es doch Fälle in welchen man sie durch sondere Betrachtungen directe auflösen kann, welche um mehr Aufmerksamkeit verdienen, da sie Feinheiten der nalysis fodern, die zu kennen wichtig ist.

Diese Fälle sind diejenigen wo die gegebene Bezie- ung nur zwischen den Elementen der Berührung selbst , ohne daß die Coordinaten x, y, darinn vorkommen.

Um durch ein Beyspiel sogleich einen Begriff von eser Art Probleme zu geben, wollen wir annehmen

man

man verlangte die Curve deren jede Tangente zwey Ordinaten, welche den Abscissen $x = m$ und $x = n$ entsprechen (verlängert wenn es nöthig ist) schneidet, dergestalt daß das Product der Theile dieser Ordinaten, welche zwischen derselben Tangente und Axe der Abscissen enthalten sind, allezeit beständig und gleich K sey.

Weil die Gleichung für die Tangente $q = a + bp$ ist (Nr. 113.), so hat man, wenn successive $p = m$ und $p = n$ gemacht wird, die zwey Werthe von q, deren Product gleich K seyn sollte. Man wird also zwischen den Elementen a und b der Berührung folgende Gleichung haben:

$$(a + mb)(a + nb) = K.$$

Der natürliche und directe Gang wäre also der, daß man an die Stelle von a und b ihre Werthe $y - xy'$ und y', substituirte, (no. 113). Man hätte alsdann folgende Gleichung der ersten Ordnung

$$[y + (m - x)y'][y + (n - x)y'] = K,$$

von welcher es nicht leicht seyn würde durch die gewöhnlichen Methoden, die ursprüngliche Gleichung zu finden.

Nimmt man aber die ersten Funktionen von dieser Gleichung, so erscheint diese

$$[y+(n-x)y'](m+x)y''+[y+(m-x)y'](n-x)y''=0,$$

worin alle Glieder sich in y'' multiplizirt finden; daher man sie in folgende zwey zerlegen kann.

$$y'' = 0 \text{ und } [y + (n - x)y'](m - x) + [y + (m - x)y'](n - x) = 0.$$

Die erste Gleichung, welche von der zweyten Ordnung ist, giebt auf der Stelle folgende von der ersten Ordnung $y' = A$, wo A eine willkührliche beständige Größe ist. Durch die in no. 59 und folgenden, festgesetzten Principien, erhält man also die vollständige ursprüngliche Gleichung

der

der vorgegebenen, indem man darin bloß dieſen Werth von y' ſubſtituirt.

Dieſe Gleichung wäre alſo von dieſer Form

$$(y - Ax + mA)(y - Ax + nA) = K;$$

d. h. indem man die Glieder entwickelt

$$(y - Ax)^2 + (y - Ax)(m + n)A + mnA^2 - K = 0.$$

Zieht man hieraus die Quadratwurzel, ſo ergiebt ſich

$$y = Ax - B;$$

indem man für B, die Wurzel der Gleichung

$$B^2 + (m + n)AB + mnA^2 - K = 0$$

nimmt. Man ſiehet hieraus daß man auf dieſe Art nur eine Gleichung für die gerade linie hat.

Wirklich findet man, daß, da die Gleichung $y'' = 0$, dieſe $y' = A$ gegeben hat, dieſe letztere die urſprüngliche Gleichung.

$$y = Ax + B$$

geben wird, wo A und B zwey willkührliche beſtändige Größen ſind. Aber mittelſt der Theorie in Nr. 59. und folgende, iſt bekannt daß dieſe zwey beſtändige Größen, nicht zu gleicher Zeit willkührlich ſeyn können; denn die gefundene Gleichung muß mit der vorgegebenen, für einen Werth von x zuſammenfallen. Macht man alſo $x = 0$, ſo hat man $y = B$, $y' = A$; man wird alſo zwiſchen A und B folgende Bedingungsgleichung haben

$$(B + mA)(B + nA) = K,$$

welche die nemliche iſt, als wir oben für die Beſtimmung von B in A gefunden haben.

Wir wollen jetzt zur andern Gleichung übergehen, die nicht von der erſten Ordnung iſt. Dieſe wird ebenfalls dienen eine urſprüngliche Gleichung von der vorgegebenen durch die Eliminirung von y' zu finden. Sie giebt in der That

$y' =$

$$y' = \frac{(2x - m - n)y}{a(m-x)(n-x)}$$

und setzt man diesen Werth in der vorgegebenen G
chung, so reducirt sie sich auf folgende:

$$y^2 + \frac{4K(m-x)(n-x)}{(m-n)^2} = 0.$$

Dieses ist eine Gleichung für die Ellipse oder für
Hyperbel, je nachdem K eine positive oder negative G
ße seyn wird. Die große Axe ist $m - n$, die kleine
$\sqrt{K}$, und die zwey Scheitel sind in den Punkten
$x = m$ und $x = n$ ist.

Die Eigenschaft der Tangenten, welche uns zu d
Gleichung geführt hat, ist in dem XLIIten Satze
dritten Buchs der Kegelschnitte des Apollonius bewi
die vorhergehende Analysis hat aber den Vorzug, e
hen zu lassen, daß diese Eigenschaft einzig nur den
gelschnitten angehört.

123.

Untersucht man jetzt die zwey so eben gefundene
lösungen, so ist leicht zu sehen, daß die erste nur di
rade Linie selbst giebt, die man als Tangente ange
men hat, indem man die zwey Elemente a und b
beständig ansahe; denn die Gleichung $y = Ax +$
nicht von der Gleichung $q = a + bp$ dieser Tang
unterschieden, indem die Gleichung zwischen beyden be
digen Größen A ur B augenscheinlich dieselbe, als d
nige ist, welche n wischen den Größen b und a a
nommen hat.

Es ist in der ichtbar, daß jede gerade
dieses Problem löß n nur zwischen ihre zwey
ständige Größen ch die Bedingungen des Pro

gegebene Beziehung da ist; und da eine willkührliche beständige Größe bleibt, so folgt daraus daß die Gl ichung von dieser geraden Linie, die ursprüngliche vollständige Gleichung, von der durch das Problem gegebenen Gleichung der ersten Ordnung ist. Also, analytisch gesprochen, so ist das Problem vollständig gelöst durch die Gleichung selbst, $y = a + bx$, wo a und b zwey beständige Größen sind, davon eine willkührlich ist, und die andere davon durch die Gleichung

$$(a + mb)\ (a + nb) = K \text{ abhängt.}$$

Was die zweyte Auflösung anbetrift, da sie keine willkührliche beständige Größe enthält, so ist sie strenge genommen weniger allgemein als die erste, und kann entweder nur ein particulairer Fall von der ersten seyn, oder eine besondere (singulière) Auflösung, welche sich aus der Betrachtung die wir in Nr. 72 entwickelt haben, ergiebt.

Man kann sich leicht auf der Stelle überzeugen, daß diese letzte Auflösung kein particulairer Fall von der ersten seyn kann; denn sonst müste die Gleichung der ersten Auflösung: $y = ax + b$ auch der Gleichung der zweyten Auflösung:

$$y^2 + \frac{4K(m - x)\ (n - x)}{(m - n)^2} = 0$$

Genüge leisten, indem man ihre willkührliche beständige Größe schicklich bestimmte, und folglich wenn man y aus diesen beyden Gleichungen eliminirte, die daraus entstehende Gleichung nichts weiter als beständige Größen enthielte, welches nicht ist.

Sie kann daher nichts anders als eine besondere (singulière) Auflösung seyn, und in der That, wir haben (Nr. 71) gesehen, daß der Character von der ursprünglichen besondern Gleichung, einer jeden Gleichung der ersten

ſten Ordnung von der Form $y' = F(x, y)$, ein ſolche iſt, der die Funktion $F'(y)$ d. h. die Erſtefunktion von $F(x, y)$ in Beziehung auf y allein genommen, unendlich macht. Wenn aber die Gleichung unſers Problem unter nachſtehender Form geſetzt wird.

$$[y + (m - x)\,y'][y + (n - x)\,y'] = K,$$

giebt

$$F(x,y) = \frac{2x - m - n + \sqrt{[4K(m-x)(n-x) + (m-n)^2 y^2}}{2(m-x)(n-x)}$$

daraus zieht man

$$F'(y) = \frac{(m-n)^2 y}{2(m-x)(n-x)\sqrt{[4K(m-x)(n-x) + (m-n)^2 y^2]}}$$

wo man ſieht daß $F'(y)$ durch die Gleichung

$$4K(m - x)(n - x) + (m - n)^2 y^2 = 0$$

unendlich wird, welches die der zweyten Auflöſung iſt.

124.

Unterſuchen wir die Art wie wir zu dieſer Auflöſung gelangt ſind, ſo wird man ſehen daß ſie von dieſem Umſtande abhing, daß die Erſtenfunktionen von a und b als Funktionen von x, y, y' betrachtet, unter ſich in einem Verhältniß ſind, welches die Zweytenfunktion y'' nicht enthält. In der That, wenn

$$b = y' \text{ und } a = y - xy',$$

ſo hat man

$$b' = y'' \text{ und } a' = -xy'',$$

welches

$$\frac{a'}{b'} = -x \text{ giebt.}$$

Nimmt man alſo die Erſtefunktion von der Gleichung

$$(a + mb)(a + nb) = K,$$

und dividirt durch b', ſo hat man eine Gleichung welche eben

ebenfalls von der erſten Ordnung iſt, und das Reſultat der Eliminirung von y' zwiſchen dieſen zwey Gleichungen, giebt die eben gefundene Gleichung der Kegelſchnitte.

Aber, ich ziehe in Erwägung daß die Größen a und b durch die Gleichungen

$y = a + bx$ und $y' = b$ (Nr. 118) gegeben ſind.

Die Gleichung von welcher alſo die Rede iſt, iſt das Reſultat der Eliminirung von a, b und y' zwiſchen den Gleichungen

$y = a + bx$, $y' = b$, $(a + mb)(a + nb) = K$,

und der Erſtengleichung dieſer letzten durch a' dividirt. Man wird alſo daſſelbe Reſultat erhalten, wenn man ſogleich eine der beyden Größen a oder b zwiſchen den zwey Gleichungen

$y = a + bx$ und $(a + mb)(a + nb) = K$

eliminirt, und ferner die andere Größe mittelſt der reſultirenden Gleichung und ihrer Erſtengleichung, ſo genommen, daß man dieſe letztere Größe variiren läßt. Eliminirt man alſo ſogleich a, ſo hat man die Gleichung.

$[y + (m - x)b][y + (n - x)b] = K.$

Nimmt man die Erſtegleichung in Hinſicht auf b, und dividirt mit b', ſo hat man

$[y + (m - x)b](n - x) + [y + (n - x)b](m - x) = o,$

daraus ziehet man

$$b = \frac{2x - m - n}{2(m - x)(n - x)},$$

wird dieſer Werth in der andern Gleichung ſubſtituirt, ſo erhält man die Gleichung wie oben

$(m - n)^2 y^2 + 4K(m - x)(n - x) = o,$

welche die zweyte Auflöſung enthält.

Man kann auch noch in Betrachtung ziehen daß die Gleichung

$$(a + mb)(a + nb) = K,$$

welche die Beziehung zwiſchen a und b enthält, in welcher die Bedingung der Aufgabe beſtehet, durch die Auflöſung $a = fb$ giebt; dieſen Werth in der Gleichung

$$y = a + bx$$

ſubſtituirt, reducirt ſolche in folgende

$$y = fb + bx,$$

welche nur noch die willkührliche beſtändige Größe b enthält, die man durch die Erſtegleichung in Hinſicht auf b genommen, nemlich, $f'b + x = o$, eliminirt, welches wiederum daſſelbe Reſultat giebt. Aber, nachdem was wir oben geſehen haben, iſt die Gleichung

$$y = fb + bx$$

die vollſtändige urſprüngliche Gleichung von der durch das Problem gegebenen Gleichung der erſten Ordnung; die daher aus der Eliminirung von b zwiſchen dieſer hier und der Gleichung $f'b + x = o$, entſtehende Gleichung, wird nach der Theorie von (Nr. 72) genau die ſingulaire urſprüngliche Gleichung ſeyn.

Anderſeits da die Gleichung

$$y = fb + bx$$

die allgemeine Gleichung der Tangenten der geſuchten Curve iſt (Nr. 122), ſo kann man daraus ſchlieſſen, daß, um die Gleichung dieſer Curve zu haben, ſo braucht man nur die willkührliche beſtändige Größe b welche die Tangenten unterſcheidet, als veränderlich anzuſehen, und ſie durch die Bedingung zu beſtimmen daß die erſte Gleichung in Beziehung auf dieſe veränderliche Größe zu gleicher Zeit ſtatt habe. Hieraus ſieht man auch, daß die urſprüngliche Gleichung, welche wir für die durch das Problem gegebene Gleichung der erſten Ordnung gefunden haben, nichts anders, als die Gleichung derjenigen Curve

e ist, welche, durch die immerwährende Durchschnitte er durch die vollständige ursprüngliche Gleichung derselen Gleichung der ersten Ordnung vorgestellten geraden inien, gebildet wird.

125.

Nachdem, solchergestalt diese Materie durch ein Beyiel erläutert ist, so wollen wir solche auf eine allgemeine rt abhandeln. Es sey, wie in Nr. 117.

$$F(x, y, b, b) = o$$

Die Gleichung der Berührungscurve, welche wir oben ls eine gerade Linie angenommen haben, und es sey

$$\phi(a, b) = o$$

ie Gleichung, welche die Beziehung zwischen den zwey durch ie Natur des vorgegebenen Problems gegebenen Elementen a,b bestimmt. Zufolge der in eben derselben Nummer gegebeen Theorie müste man a und b durch die zwey Gleichungen

$$F(x, y, a, b) = o \text{ und } F(x, y, a, b)' = o$$

estimmen.

Wir haben aber (Nr. 59) gesehen, daß, wenn man us den drey Gleichungen

$$F(x, y, a, b) = o. \quad F(x, y, a, b)' = o$$

$$\text{und } F(x, y, a, b)'' = o.$$

und b eliminirt, man zwischen x, y, y′ und y″ eine leichung der zweyten Ordnung hat, welche wir durch = o bezeichnen, und von welcher

$$F(x, y, a, b) = o,$$

vollständige ursprüngliche Gleichung seyn wird, wo a d b die willkührlichen beständigen Größen sind. Wir ben auch gesehen, daß wenn man a oder b aus den den ersten Gleichungen eliminirt, die beyden entstehen Gleichungen ursprüngliche Gleichungen der ersten

Ordnung derſelben Gleichung $V = o$ ſeyn werden, und von welcher dieſe hier das Reſultat ſeyn wird, indem man von neuem die erſten Funktionen nimmt, und die übrig gebliebene beſtändige Größe eliminirt (Nr. 60).

Wenn man alſo, aus dieſen erſten beyden Gleichungen die Werthe von a und b zieht, die wir durch P und Q bezeichnen wollen, und man ſolchergeſtalt

$$a = P, \quad b = Q$$

hat, wo P und Q Funktionen von x, y und y' ſind; man ferner die Erſtenfunktionen dieſer Gleichungen nimmt, indem man immer a und b als beſtändige Größen anſieht, ſo wird man die Gleichungen der zweyten Ordnung $P' = o$, $Q' = o$ haben, die mit der Gleichung $V = o$ zuſammenfallen ſollten; und man alſo nothwendiger Weiſe haben wird:

$$P' = M\,V, \quad Q' = N\,V,$$

wo M und N Funktionen von x, y und y' ohne y'' ſind. Denn, wenn z. B. M noch y'' enthielte, ſo würde die Gleichung $P' = o$, auſſer $V = o$, noch die andere Gleichung der zweyten Ordnung $M = o$ geben, welche nicht in der nemlichen Gleichung $V = o$, enthalten wäre; welches nicht ſeyn kann.

Subſtituirt man alſo dieſe Werthe von a und b in der Gleichung des Problems

$$\phi\,(a, b) = o,$$

ſo wird man haben

$$\phi\,(P, Q) = o.$$

Nimmt man ferner die Erſtegleichung, ſo hat man

$$P'\,\phi'\,(P) + Q'\,\phi'\,(Q) = o,$$

indem man durch $\phi'\,(P)$ und $\phi'\,(Q)$ die Erſtefunktionen von $\phi\,(P, Q)$ in Hinſicht auf P und Q iſolirt genommen, bezeichnet.

Setzt

Setzt man daher für P′ und Q′ die obigen Ausdrücke so wird diese letztere Gleichung

$$V' [M \varphi' (P) + N \varphi' (Q)] = o,$$

welche sich ganz natürlich in folgende zwey Gleichungen zerlegen läßt:

$V = o$ und $M \varphi' (P) + N \varphi' (Q) = o.$

Die erste Gleichung $V = o$, wird von der zweyten Ordnung seyn, und zur vollständigen ursprünglichen Gleichung haben;

$$F (x, y, a, b) = o,$$

d. h. die Gleichung der Berührungscurve selbst, in welcher eine einzige der beyden beständigen Größen a und b willkührlich seyn wird, indem die andere durch die Gleichung des Problems $\varphi (a, b) = o$, selbst bestimmt ist.

Die andere Gleichung

$$M \varphi' (P) + N \varphi' (Q) = o$$

wird nur von der ersten Ordnung, und ohne willkührliche beständige Größe seyn. Wird sie aber mit der Gleichung $\varphi (P, Q) = o$ combinirt, so giebt sie durch die Eliminirung von y′, zwischen x und y eine Gleichung die die singulaire ursprüngliche Gleichung von dieser letztern $\varphi (P, Q) = o$, seyn wird.

Diese Gleichung wird also das Resultat der Eliminirung der Größen a, b und y′ zwischen den vier Gleichungen

$$F (x, y, a, b) = o,$$

$$F (x, y, a, b)' = o$$

$$\varphi (a, b) \text{ und } M \varphi' (a) + N \varphi' (b) = o$$

seyn.

Sieht man nun a und b als Funktionen von x und y an, so geben, die Gleichungen $a = P$, $b = Q$, die aus den beyden ersten entstehen, folgende zwey Ersteleichungen

$$a' = P' = M\,V'$$
$$\text{und } b'\ Q' = N\,V',$$

mithin

$$\frac{N}{M} = \frac{b'}{a'}.$$

Solchergestalt reducirt sich die letzte Gleichung auf

$$\varphi'(a) + \frac{b''\varphi'(b)}{a'} = 0,$$

welche nichts anders als die Erstegleichung von

$\varphi(a, b) = 0$ durch a' dividirt ist.

Anderseits, ist es augenscheinlich, daß, bey der Voraussetzung von a und b als veränderliche Größen, die Erstefunktion von

$$F(x, y, a, b)$$

nicht bloß $F(x, y, a, b)'$ ist,

sondern man, die der Variirung von a und b zukommende Glieder hinzusetzen muß, welche $a' F'(a) + b' F'(b)$ sind, indem man durch $F'(a)$ und $F'(b)$ die Erstenfunktionen von $F(x, y, a, b)$ in Hinsicht auf a und auf b die allein als veränderlich angesehen sind, genommen, bezeichnet.

Nimmt man daher die Erstenfunktionen der Gleichung

$$F(x, y, a, b) = \rho$$

so wird man haben:

$$F(x, y, a, b)' + a' F'(a) + b' F'(b) = 0;$$

man hat aber bereits die Gleichung

$$F(x, y, a, b)' = 0;$$

daher hat man, in der Voraussetzung a und b als veränderlich, die Gleichung

$$a' F'(a) + b' F'(b) = 0,$$

woraus folgt

$F x,$

$$\frac{b'}{a'} = -\frac{F'(a)}{F'(b)},$$

ses ist der Werth von $\frac{N}{M}$, welchen man direct auf diese
t finden kann, und wie man deutlich siehet, nur eine
nktion der ersten Ordnung seyn kann, weil sie nur die
ößen x, y und a, b enthält.

Die in Rede stehende Gleichung wird also nach der
engsten Analyse, das Resultat der Eliminirung von a,
und $\frac{b'}{a'}$ zwischen den vier Gleichungen

$$F(x, y, a, b) = o,$$

$$\varphi(a, b), F'(a) + \frac{b'}{a'} F'(b) = o,$$

$$\varphi'(a) + \frac{b'}{a'} \varphi'(b) = o$$

yn, von welchen die zwey letzten die Erstenfunktionen
er zwey ersten sind, in Beziehung auf a und b genom-
len und durch a' dividirt.

Die Gleichung

$$F(x, y, a, b) = o$$

st hier weiter nicht mehr nöthig, und findet sich ersetzt
urch die Gleichung

$$F'(a) + \frac{b'}{a'} F'(b) = o,$$

ie davon eine Folge ist.

Wenn man daher sogleich die zwey ersten Gleichungen
urch die Eliminirung von b, in einer einzigen Gleichung
ringt, so ist weiter nichts zu thun, als von dieser Glei-
ung die Erstegleichung, in Beziehung auf a allein zu
hmen, und nachher a mittelst dieser zwey Gleichungen

zu eliminiren, das Resultat wird nothwendigerweise dasselbe als vorher seyn.

Wenn man daher, aus der, durch die Bedingungen des Problems, zwischen den Elementen a, b der Berührung, gegebenen Gleichung, den Werth von b in a zieht und man $b = \psi a$ (ψ ist auch das Zeichen einer Funktion) annimmt, diesen Werth in der Gleichung

$$F(x, y, a, b) = o$$

von der Berührungscurve substituirt, nachher die Erstefunktion von

$$F(x, y, a, \psi a)$$

in Beziehung auf a allein nimmt, welche Funktion wir durch

$$a' F'(a, \psi a)$$

bezeichnen wollen, wo a' die Erstefunktion von a als Funktion von x betrachtet ist, so wird man folgende zwey Gleichungen haben

$$F(x, y, a, \psi a) = o$$

$$\text{und } F(a, \psi a) = o,$$

aus welchen man a eliminiren müste; und es ist sichtbar daß das Resultat nichts anders seyn wird als die singulaire ursprüngliche Gleichung der ersten Ordnung, wovon

$$F(x, y, a, \psi a) = o$$

das vollständige Integral seyn wird. (Nr. 72.)

Die durch diese singulaire Gleichung dargestellte Curve wird eigentlich diejenige seyn die das Problem auflöst, und welche die Eigenschaft haben wird, in jedem Punkte durch eine, der durch die Gleichung $F(x, y, a, \psi a) = o$ dargestellten Curven, berührt zu werden. In dieser Gleichung ist a für eine und eben dieselbe Curve beständig, aber veränderlich von einer Curve zur andern.

Die

125.

Die Art wie wir zu dieſer letzten Auflöſung gekommen ſind, iſt analytiſch zu reden die directeſte, aber durch folgende Betrachtung kann man leichter dazu kommen. Da das Problem darin beſtehet die Curve zu finden, die in jedem Punkte, eine Berührung der erſten Ordnung, mit derjenigen Curve hat, die durch die Gleichung

$$F(x, y, a, \psi a) = o$$

dargeſtellt iſt, wo a ein unbeſtimmter Parameter iſt, ſo folgt (Nr. 117) daß die Gleichung der geſuchten Curve, für y und für y′ Funktionen von x, von derſelben Form, als diejenigen ſind welche aus den Gleichungen

$$F(x, y, a, \psi a) = o,$$

$$\text{und } F(x, y, a, \psi a)' = o$$

hervorgehen, indem man durch

$$F(x, y, a, \psi a)'$$

die Erſtefunktion von

$$F(x, y, a, \psi a)$$

in Beziehung auf a und y bezeichnet.

Da und a eine unbeſtimmte Größe iſt, ſo kann man ſie ſo annehmen, daß die geſuchte Curve durch die nemliche Gleich[illegible]

$$F(x, y, a, \psi a) = o$$

dargeſtellt wird, wenn nur die E[illegible]leichung von dieſer hier, auch von derſelben Form

$$F(x, y, a, \psi a)' = o$$

iſt.

Iſt aber a eine veränderliche Größe, ſo wird, wie wir oben geſehen haben von

$$F(x, y, a, \psi a),$$

die vollſtändige Erſtegleichung ſeyn:

F 2

$$F'(x, y, a, \psi a) + a' F'(a, \psi a).$$

Die in Rede ſtehende Gleichung wird alſo erfüllt ſeyn wenn man a durch die Gleichung

$$F'(a, \psi a) = o$$

beſtimmt; welches die ſo eben gegebene letzte Auflöſung geben wird.

Jede Gleichung, zwiſchen x, y und einen unbeſtimmten Parameter a, welche wir, mehrerer Einfachheit wegen durch $f(x, y, a) = o$ bezeichnen, ſtellt, indem man ſucceſſive a alle mögliche Werthe giebt, eine Familie dar, von einer unendlichen Anzahl Curven, die in der Form oder in der Lage, oder in beyden zugleich, im Verhältniß der Variationen des Parameters, variiren; und wenn man dieſen Parameter mittelſt der Eyſtenfunktionen (N. 59), eliminiret, ſo wird die entſtehende Gleichung der erſten Ordnung zu dieſer ganzen Familie der Curven gehören. Sie wird alſo auch zu der aus allen dieſen Curven, gebildeten Curve gehören. Dieſe Curve wird alle andere umfaſſen, indem ſie mit jeder von ihnen eine Berührung der erſten Ordnung hat. Die nemliche Gleichung $f'(x, y, a) = o$, ſo wie auch ihre Erſtegleichung $f(x, y, a)' = o$, in Beziehung auf x und y allein genommen, ſollten alſo auch für jeden Punkt von dieſer umfaſſungs Curve, gültig ſeyn, indem man den Parameter a als eine veränderliche Größe anſieht.

Aber, in dieſer Hypotheſe iſt, von $f(x, y, a)$ die vollſtändige Erſtefunktion;

$$f(x, y, a)' + a' f'(a),$$

indem man durch $f'(a)$ die Erſtefunktion, in Beziehung auf a allein genommen, bezeichnet, nnd durch a' die Erſtefunktion von a, wo a als eine beliebige Funktion von x angeſehen iſt; es muß daher der Werth von a ſo beſchaffen

haffen seyn, daß man $f'(a) = o$ hat; welches von der Gleichung der ersten Ordnung die der Gleichung $f(x, y,) = o$ entspricht, in welcher a als eine willkührliche beständige Gröfe behandelt ist (Nr. 72), die singulaire ursprüngliche Gleichung geben wird.

Hieraus kann man allgemein schliessen, daß von einer Gleichung der ersten Ordnung die singulaire ursprüngliche Gleichung, immer die umfassungs Curve vorstellt, an allen den Curven die durch ihre vollständige ursprüngliche Gleichung dargestellt werden können, indem man der willkührlichen beständigen Größe alle mögliche Werthe ebt.

127.

Wir wollen auch die Berührungen der zweyten Ordnung betrachten, und wollen

$$F(x, y, a, b, c) = o$$

ür die Gleichung der Berührungscurve nehmen, und voraussetzen, daß zwischen den drey Elementen a, b, c, die urch die Gleichung $\varphi(a, b, c) = o$, gegebene Beiehung, vorhanden ist.

Da die Werthe dieser Elemente sich aus den drey Gleichungen

$$F(x, y, a, b, c) = o,$$
$$F(x, y, a, b, c)' = o,$$
$$F(x, y, a, b, c)'' = o$$

egeben soll (Nr. 117). so bezeichne man diese Werthe urch P, Q, R, alsdann wird die Gleichung des Problems yn

$$\varphi(P, Q, R) = o,$$

elche wie man siehet von der zweyten Ordnung ist.

Die

Die drey Gleichungen

$$a = P,\quad b = Q,\quad c = R$$

werden (indem man die Erstenfunktionen in der Voraussetzung von a, b, c, als beständige Größen, nimmt) die nemliche Gleichung $V = o$ der dritten Ordnung geben, welche das Resultat der Eliminirung von a, b, c, mittelst der drey vorhergehenden Gleichungen, combinirt mit der Drittengleichung

$$F(x, y, a, b, c)''' = o$$

seyn wird (Nr. 59); mithin hat man nothwendig

$$P' = M\,V,\quad Q' = N\,V,\quad R' = L\,V,$$

wo M, N, L, Funktionen von x, y, y' und y'' ohne y''' sind; solchergestalt, wenn man die Erstefunktionen der Gleichung $\phi(P, Q, R) = o$ nimmt, so wird man haben

$$P'\,\phi'(P) + Q'\,\phi'(Q) + R'\,\phi'(R) = o$$

nemlich:

$$V[M\,\phi'(P) + N\,\phi'(Q) + L\,\phi'(R)] = o,$$

diese Gleichung theilt sich natürlich in folgende zwey,

$$V = o$$

und $M\,\phi'(P) + N\,\phi'(Q) + L\,\phi'(R) = o$,

wovon die erste von der dritten, und die zweyte nur von der zweyten Ordnung ist.

Die Gleichung $V = o$ hat, wie wir bereits gesehen haben, zur Beständigen ursprünglichen Gleichung.

Die Gleichung der Berührungscurve selbst

$$F(x, y, a, b, c) = o,$$

in welcher a, b, c die drey willkührliche beständige Größen sind, da aber die Gleichung des Problems

$$\phi(P, Q, R) = o,$$

nur von der zweyten Ordnung ist, so muß sich eine Beziehung zwischen diesen drey beständigen Größen, finden, welche sie auf zwey willkührliche Größen reducirt; und

diese

se Beziehung ist durch die Gleichung

$$\varphi(a, b, c) = o$$

geben, die aus der vorhergehenden hervorgeht, wenn an die aus den Gleichungen

$$a = P,\ b = R,\ c = R$$

ngenen Werthe von P, Q, R, substituirt.

Da die andere Gleichung von der zweyten Ordnung , so kann man durch sie aus der Gleichung $\phi(P, Q, R) = o$, die Funktion y'' eliminiren, und die daraus entstehende, wird von dieser hier eine ursprüngliche Gleichung der ersten Ordnung seyn, die aber keine willkührliche beständige Größe enthalten wird.

Diese Gleichung wäre also das Resultat der Elimination der Größen a, b, c und y'', vermittelst der Gleichungen

$$F(x, y, a, b, c) = o,$$
$$F(x, y, a, b, c)' = o.$$
$$F(x, y, a, b, c)'' = o,$$
$$\phi(a, b, c) = o, \text{ und}$$
$$M\phi'(a) + N\phi'(b) + L\phi'(c) = o.$$

Sieht man aber a, b, c als Funktionen von x, y an, so wird von

$$F(x, y, a, b, c),$$

die Erstefunktion seyn:

$$F(x, y, a, b, c)' + a'F'(a) + b'F'(b) + c'F'(c),$$

indem man bloß durch

$$F'(a),\ F'(b),\ F'(c)$$

die Erstenfunktionen von $F(x, y, a, b, c)$ (in Beziehung auf a, b, c, welche allein als veränderlich angesehen sind, genommen) bezeichnet; daher die zwey Gleichungen

$$F(x, y, a, b, c) = o$$
$$\text{und } F(x, y, a, b, c)' = o$$

folgende mit ſich bringen

$$a'F'(a) + b'F'(b) + c'F'(c) = 0.$$

Ueberdem wird aus eben der Urſache von

$F(x, y, a, b, c)'$, die Erſtefunktion ſeyn

$F(x, y, a, b, c)'' + a'F'(a)' + b'F'(b)' + c'F'(c)'$,

indem man ebenfalls durch

$$F'(a)', F'(b)', F'(c)'$$

die Erſtenfunktionen von $F(x, y, a, b, c)'$ (in Beziehung auf a, b, c, welche allein als veränderlich angeſehen ſind genommen) bezeichnet; und da man in der Bildung dieſer abgeleiteten Funktionen, die Größen a, b, c als unabhängig von x und y anſieht, ſo iſt leicht durch die im erſten Theile (no. 86) aufgeſtellten Principien, zu beweiſen, daß die Funktionen

$$F'(a)', F'(b)', F'(c)',$$

daſſelbe ſeyn werden, als die Erſtenfunktionen der Funktionen

$$F'(a), F'(b), F'(c),$$

in Beziehung auf x und y genommen. Folglich bringen die zwey Gleichungen

$$F(x, y, a, b, c)' = 0$$

und $F(x, y, a, b, c)'' = 0$

nothwendig noch dieſe andere mit:

$$a'F'(a)' + b'F'(b)' + c'F'(c)' = 0.$$

Wenn man daher dieſe zwey Gleichungen

$$F'(a) + \frac{b'}{a'} F'(b) + \frac{c'}{a'} F'(c) = 0,$$

$$F'(a)' + \frac{b'}{a'} F'(b)' + \frac{c'}{a'} F'(c)' = 0,$$

mit der Gleichung

$$\phi'(a) + \frac{b'}{a'} \phi'(b) + \frac{c'}{a'} \phi'(c) = 0,$$

die aus $\varphi(a, b, c,) = 0$ entſpringt, combinirt, und die Erſtenfunktionen nimmt, ſo erhält man, durch die Eli-

mini-

minirung der Größen $\frac{b'}{a'}$ und $\frac{c'}{a'}$, eine Gleichung in a, b, c, und x, y, y' ohne y'', welche derjenigen equivalent seyn wird, die man aus den beyden Gleichungen

$$F(x, y, a, b, c)'' = o \text{ und}$$
$$M\,\varphi'(a) + N\,\varphi'(b) + L\,\varphi'(c) = o$$

durch Eliminirung von y'', abgeleitet hat.

Es bleibt also nur noch a, b, c, vermittelst der Gleichungen

$$F(x, y, a, b, c) = o,$$
$$F(x, y, a, b, c)' = o,$$
$$\text{und } \varphi(a, b, c) = o$$

zu eliminiren, und das Endresultat wird die nemliche ursprüngliche Gleichung der ersten Ordnung, von der Gleichung $\varphi(P, Q, R) = o$ seyn, welche da sie ihrer Natur nach, keine willkührliche beständige Größen enthält, nur eine singulaire ursprüngliche Gleichung seyn kann.

In der That, wenn man, um die Auflösung zu vereinfachen, damit anfängt, den Werth von c aus der Gleichung

$$\varphi(a, b, c) = o$$

zuziehen, und man diesen Werth durch $\psi(a, b)$ darstellt alsdann die Auflösung sich darauf reducirt a, b und $\frac{b'}{a'}$ zu eliminiren zwischen den zwey Gleichungen

$$F[x, y, a, b, \psi(a, b)] = o,$$
$$F[x, a, b, \psi(a, b)]' = o$$

und den zwey Erstengleichungen von jener, in Hinsicht auf a und b allein genommen, und durch a' dividirt: ein analoges Verfahren von Nr. 124.

128.

Allgemein, wenn man eine Gleichung zwiſchen x, y und zwey willkührliche beſtändige Größen a und b hat, welche wir durch

$$f(x, y, a, b) = o$$

darſtellen; und man dieſe zwey beſtändige Größen, vermittelſt der zwey abgeleiteten Gleichungen

$$f(x, y, a, b)' = o$$

$$\text{und } f(x, y, a, b)'' = o$$

eliminirt, ſo wird man eine Gleichung der zweyten Ordnung $V = o$ haben, die zu allen durch die Gleichung

$$f(x, y, a, b) = o$$

vorgeſtellten Curven, gehört, indem man a und b beſtändige Werthe giebt, und von welcher folglich dieſe hier die vollſtändige urſprüngliche Gleichung ſeyn wird.

Sie gehört daher auch zu der Curve, oder zu der durch alle dieſe Curven, gebildeten Curve, und welche ſie dergeſtallt einſchlieſſen, daß ſie mit einer jeden von ihnen eine Berührung der zweyten Ordnung hat, d. h. in welchen die y, y' und y'' die nemlichen ſind. Aber, da die Größen a und b in jeder eingewickelten Curve beſtändig, und veränderlich für alle umfaſſuugs Curven (courbes enveloppantes) ſind, ſo müſſen, (damit daß die y, y', y'' die nemlichen in den zwey Hypotheſen ſind) die Gleichungen von welchen ſie abhangen, auch die nemliche ſind. Nun giebt, die Gleichung $f(x, y, a, b) = o$, in der Vorrausſetzung von a und b als veränderlich, die Entſtegleichung

$$f(x, y, a, b)' + a' f'(a) + b' f'(b) = o;$$

mithin, damit dieſe Gleichung ſich auf

$$f(x, y, a, b)' = o$$

ducirt, wie in dem Fall a und b als beſtändig, ſo mu
e man haben

$$a' f'(a) + b' f'(b) = o.$$

Auf eben die Art giebt die Gleichung

$$f(x, y, a, b)' = o,$$

n Fall a und b veränderlich, folgende abgeleitete Glei
ung

$$f(x, y, a, b)'' + a' f'(a)' + b' f'(b)' = o;$$

elche ſich nicht, wie in dem Falle, wenn a und b be
ndig ſind, auf

$$f(x, y, a, b)'' = o$$

ingen läßt, als wenn man,

$$a' f'(a)' + b' f'(b)' = o,$$

zt.

Hat man ſolchergeſtalt die vier Gleichungen

$$f(x, y, a, b) = o,$$

$$f(x, y, a, b)' = o,$$

$$f'(a) + \frac{b'}{a'} f'(b) = o$$

$$\text{und } f'(a)' + \frac{b'}{a'} f'(b)' = o,$$

darf man nur a, b und $\frac{b'}{a'}$ eliminiren, und man
ne Gleichung der erſten Ordnung zwiſchen x, y und y'
aben, welche die Gleichung für die enveloppirende Cur
en iſt, und welche zu gleicher Zeit von der Gleichung
= o die ſingulaire urſprüngliche Gleichung iſt.

Man ſieht hieraus, wie die Theorie der ſingulairen
rſprünglichen Gleichungen, ſich auf der zweyten und hö
ern Ordnungen erſtreckt. Man ſieht zugleicher Zeit, daß
ieſe Gleichungen immer enveloppirende Curven vorſtellen,
ie mit den eingewickelten Curven, Berührungen von an

gegebener Ordnung haben, welche durch die vollständigen ursprünglichen Gleichungen vorgestellt sind, in welchen die willkührlichen beständigen Größen von einer Curve zur andern variiren. Dieses kann als Supplement und Complement, der im ersten Theile (Nr. 72) vorgelegten Theorie der ursprünglichen Gleichungen dienen.

Uebrigens, so wie die obigen vier Gleichungen

$$f(x, y, a, b) = 0,$$
$$f(x, y, a, b)' = 0,$$
$$f'(a) + \frac{b'}{a'} f'(b) = 0,$$
$$f'(a)' + \frac{b'}{a'} f'(b)' = 0,$$

durch die Eliminirung von a, b und $\frac{b'}{a'}$, eine Gleichung der ersten Ordnung zwischen x, y und y' geben, eben so geben diese Gleichungen gleichfalls, durch die Eliminirung dieser drey letztern Größen, eine Gleichung in a, b und $\frac{b'}{a'}$, welche die Beziehungen enthalten wird, die diese zwey veränderliche Größen a und b unter sich haben müssen. Hieraus siehet man, daß diese Größen die unter sich in jeder der eingewickelten Curven unabhängig sind, es sich mehr sind, wenn sie sich auf den enveloppirenden Curven beziehen. Man wird ähnliche Resultate, für Gleichungen und für Curven höherer Ordnung finden.

129.

Gesetzt man verlangt die Curve, welche in jeden ihrer Punkte eine Berührung der zweyten Ordnung hätte, und dieses mit einem Kreise dessen Gleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$$

ist,

ſt, und von welcher die Elemente der Berührung a, b, ı, unter ſich, eine durch die Gleichung

$$\varphi(a, b, c) = o$$

beſtimmte Beziehung haben.

Der natürliche Weg dieſes Problem aufzulöſen, wäre n dieſer Gleichung die oben Nr. 118 gefundenen Werthe er Elemente a, b, c zu ſubſtituiren, welches eine Glei- hung der zweyten Ordnung gäbe, von welcher man zur rſprünglichen Gleichung zurückſteigen müßte.

Aber, ohne dieſe Gleichung der zweyten Ordnung zu ichen, kann man aus dem kurz vorherbewieſenen ſchlie- en, daß man ihre vollſtändige urſprüngliche Gleichung halten wird, wenn man die Größen a b c, als beſtändig nnimmt, welches dieſelbe Gleichung für den Kreis wie- rgeben wird. Man wird daraus ferner ſchlieſſen, daß ieſelbe Gleichung auch eine ſingulaire urſprüngliche Glei- ung der erſten Ordnung zulaſſen wird, welche man er- ilt, wenn man die Größen a, b, c, variiren läßt, der- geſtalt daß die Erſten- und Zweyten-Gleichungen, der leichung für den Kreis, dieſelben ſeyen, als wenn dieſe rößen als beſtändig angeſehen wären; und daß dieſe ur- rüngliche Gleichung alsdann die Curve oder die Curven orſtellen, welche durch die Vereinigung von allen durch ieſelbe Gleichung vorgeſtellten Kreiſen gebildet werden, d. . welche alle dieſe Kreiſe einwickeln oder umfaſſen.

Dieſe Gleichung wird alſo durch die oben feſtgeſetzten rincipien, das Reſultat der Elimination der Größen

$$a, b, c \text{ und } \frac{b'}{a'}, \quad \frac{c'}{a'},$$

iſchen den drey Gleichungen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2,$$
$$(x - a) + y'(y - b) = o,$$

$$\varphi(a, b, c) = o$$

seyn, und die Erstengleichungen von diesen hier, in Beziehung der einzigen veränderlichen Größen a, b, c, genommen; sind folgende:

$$x - a + \frac{b'}{a'}(y - b) = \frac{cc'}{a'},$$

$$1 + \frac{b'}{a'} y' = o,$$

$$\varphi'(a) + \frac{b'}{a'} \varphi'(b) + \frac{c'}{a'} \varphi(c) = o.$$

Da aber diese Gleichung zwischen x und y sich unter einer ziemlich zusammengesetzten Form darstellen könnte, so wird es viel einfacher seyn, die Werthe von x und y selbst durch eine dritte veränderliche Größe zu bestimmen.

Dieserwegen eliminire man sogleich y', mittelst der zwey Gleichungen

$$x - a + y'(y - b) = o$$

$$\text{und } 1 + \frac{b'}{a'} y' = o;$$

so wird man folgende haben:

$$x - a - \frac{a'(y - b)}{b'} = o,$$

die, wenn sie mit der ersten

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2,$$

combinirt wird, auf der Stelle

$$x = a + \frac{ca'}{\sqrt{(a'^2 + b'^2)}},$$

$$y = b + \frac{cb'}{\sqrt{(a'^2 + b'^2)}}$$

giebt.

Wenn

Wenn man ferner, dieſe nemlichen Werthe von x und y in der Gleichung

$$x - a + \frac{b'}{a'}(y - b) = \frac{cc'}{a'}$$

ſubſtituirt, ſo wird man dieſe haben:

$$c' = \sqrt{(a'^2 + b'^2)}.$$

Dieſe mit der durch das Problem gegebenen Gleichung

$$\phi(a, b, c) = 0$$

ombinirt, dient zwey von den drey veränderlichen Grö-ßen a, b, c durch die dritte zu beſtimmen; durch dieſes Mittel ſind auch die Werthe von x und y durch dieſe einzige veränderliche Größe ausgedrückt.

130.

Da die Größen a und b die Coordinaten von der Curve ſind, die der Ort von allen Mittelpunkten der Berührungskreiſe iſt (no. 116), ſo wird man eine Gleichung zwiſchen a und b haben, durch welche man b in a beſtimmen kann, wenn man jene Curve als gegeben annimmt.

Es ſey alſo $b = \phi a$,

ſo hat man $b' = a'\phi' a$,

und hieraus $c' = a'\sqrt{[1 + (\phi' a)^2]}$;

Alſo, wenn man die urſprüngliche Funktion von

$$a'\sqrt{[1 + (\phi' a)^2]}$$

durch A bezeichnet ſo hat man

$$c = A + h,$$

wo h eine willkührliche beſtändige Größe iſt; werden dieſe Werthe von b und c in den Ausdrücken von x und y ſubſtituirt, ſo wird man die geſuchte Curve haben.

Wir bemerken jetzt, daß, welche auch immer die Curve der Mittelpunkte ſeyn mag, ſo zeigt die Gleichung

$$c' = \sqrt{(a'^2 + b'^2)}$$

daß der Radius c dem Bogen von dieser Curve gleic
(Siehe weiter unten no. 134); Nenn man also dieses
gen S, so hat man

$$c = s + h.$$

Wir bemerken ferner, daß der Radius c nothw
eine Tangente dieser Curve seyn muß; denn der W
welchen die Tangente dieser Curve mit der Axe n
hat zur Tangente die Größe $\frac{b'}{a'}$ (no. 114), und d
Radius des Berührungskreises senkrecht auf die Cur
deren Coordinaten x und y sind (no. 115), so wir
Tangente des Winkels, welchen er mit der Axe

$$= -\frac{1}{y'} \text{ (no. 114)} = \frac{b'}{a'},$$

der Gleichung

$$1 + \frac{b'y'}{a'} = 0$$

zufolge; also, u. s. w.

Aber, obgleich diese Eigenschaft auf diese Art
sen ist, so ist es gut zu zeigen, daß sie eine nothw
Folge, von der in der Auflösung der Aufgabe ang
deten Analysis ist. Wir nehmen daher die beyden
chungen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$$

$$\text{und } x - a + y'(y - b) = 0$$

wieder vor, und finden daraus

$$a = x - \frac{cy'}{\sqrt{(1 + y'^2)}}$$

$$\text{und } b = y + \frac{c}{\sqrt{(1 + y'^2)}},$$

wobey wir anzeigen, daß diese Ausdrücke von

b zugleich die Coordinaten von der Perpendiculaire der Curve, wovon x und y die Coordinaten sind, vorstellen können, indem man x und y als beständig ansieht, und c als veränderlich, so wie man oben no. 115. gesehen hat, und die Coordinaten von der Curve der Mittelpunkte, indem man x und y als veränderlich, und c als durch x und y gegeben ansieht (no. 116).

Die in Rede stehende Perpendiculaire, ist also von dieser letzten Curve eine Tangente, wenn die Erstefunktion von b, als Funktion von a, betrachtet, dieselbe für die gerade Linie und für die Curve ist (Nr. 117); oder, allgemein, wenn die Werthe von a' und von b', als Funktionen einer dritten veränderlichen Größe angesehen, dieselben sind, und folglich auch wenn die Werthe von $\frac{a'}{c'}$ und $\frac{b'}{c'}$ dieselben sind, es sey daß die Größen x und y als veränderlich behandelt sind, oder nicht, d. h. wenn in diesen Werthen die von den Variirungen von x und y abhängigen Theile, Null sind; dieses findet aber wirklich statt, wie man durch die Gleichungen

$$a'(x - a) + b'(y - b) = cc'$$
$$\text{und } a' + b'y' = o$$

sieht, die zur Bestimmung von $\frac{a'}{c'}$ und von $\frac{b'}{c'}$ dienen, und welche die Erstengleichungen von

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$$
$$\text{und } x - a + y'(y - b) = o$$

sind, indem man darin x und y als beständig und a und b als allein veränderlich behandelt.

Da also der Berührungshalbmesser einer Curve überall Tangente an der Curve der Mittelpunkte ist, und zugleicher Zeit dem Bogen dieser Curve gleich ist, so folgt

daraus, daß, er für denſelben Bogen in gerader Linie ausgedehnt genommmen werden kann, und mithin jede Curve angeſehen werden kann, als wäre ſie durch die Abwickelung derjenigen Curve entſtanden, die der Ort der Mittelpunkte von den Berührungskreiſen iſt. Hierin beſtehet eigentlich die Theorie der Evoluten von Huygens, welche man nur durch geometriſche Betrachtungen bewieſen hatte. Die vorhergehende Analyſis giebt zugleich die Erklärung eines Paradoxum, welches ſich zeigt, wenn man, durch die bekannten Formeln, die Curve ſucht die durch die Abwickelung einer gegebenen Curve entſtehet.

Wenn man in der Gleichung dieſer Curve, die Ausdrücke von ihren Coordinaten a und b in x, y, y′ und y″ ſubſtituirt, ſo hat man augenſcheinlich eine Gleichung der zweyten Ordnung, woraus zu folgen ſcheint daß die Gleichung in x und y von der geſuchten Curve, zwey willkührliche beſtändige Größen enthalten müſſe, da doch die Erzeugung dieſer Curve, durch die Abwickelung der gegebenen Curve, nicht mehr als eine willkührliche beſtändige Größe zuläßt, welche von dem Punkt wo die Abwickelung ihren Anfang nimmt, abhängt.

Die Urſache von dieſem Unterſchiede beſtehet, wie wir ſo eben bewieſen haben, darin, daß die Gleichung der durch die Abwickelung erzeugten Curve, eigentlich die vollſtändige urſprüngliche Gleichung von einer Gleichung der erſten Ordnung iſt, die ſelbſt nur die ſingulaire urſprüngliche Gleichung von der durch die Bedingungen des Problems gegebenen Gleichung der zweyten Ordnung iſt, und welche, ihrer Natur nach, keine willkührliche beſtändige Größen haben kann; es kann alſo wegen der erſten urſprünglichen Gleichung, nur eine willkührliche beſtändige Größe darin ſeyn.

131.

131.

Es giebt eine Gattung Fragen die, obgleich von der Betrachtung der Tangenten unabhängig, demohngeachtet darauf bezogen werden können. Es sind die, welche man von Maximum und Minimum nennt, und welche darin bestehen, aus einer gegebenen Funktion einer veränderlichen Größe, den Werth dieser veränderlichen Größe zu finden, welcher den Werth der Funktion am größten oder am kleinsten macht.

Da die Curven nichts weiter sind als die Darstellung oder das Tableau von allen Werthen der Funktion der Abscissen, welche durch die Ordinate vorgestellt ist, so ist sichtbar, daß die Frage den größten oder den kleinsten Werth einer gegebenen Funktion einer einzigen veränderlichen Größe zu finden, darauf hinaus läuft, die größte oder kleinste Ordinate von der Curve zu bestimmen, von welcher diese veränderliche Größe die Abscisse, und die die gegebene Funktion die Ordinate wäre.

Aber die bloße Ansicht der Curve ist hinlänglich zu zeigen daß diese Ordinaten, keine andere als die seyn können, die den Punkten entsprechen wo die Tangenten mit der Axe der Abscissen parallel sind. Wenn die Curve gegen die Axe convex (erhaben) ist, so wird die Ordinate augenscheinlich ein Minimum seyn, und wenn die Curve gegen die Axe concav (hohl) ist, so ist die Ordinate ein Maximum.

Wir haben (no. 114) gesehen, daß die Tangente des Winkels, welchen die Tangente einer Curve mit der Axe macht, allgemein dnrch y' ausgedrückt ist, wo y die Ordinate ist, welche man als Funktion von der Abscisse x annimmt; damit also diese Tangente mit der Axe parallel

lel läuft, so muß man haben $y' = 0$; wenn man aber in den Ausdrücken der Coordinaten a und b (no. 116), welche den Ort vom Mittelpunkte des Berührungskreises bestimmen, $y' = 0$ macht, so hat man

$$a = x, \quad b = y + \frac{1}{y''},$$

woraus man sieht, daß wenn y' eine positive Größe ist, dieser Mittelpunkt über der Curve hinausfällt, die folglich gegen die Axe convex ist; und daß, wenn y'' eine negative Größe ist, derselbe Mittelpunkt unterhalb der Curve fällt, d. h. auf die Seite der Axe, und daß folglich die Curve alsdann gegen die Axe concav ist. Die Funktion y wird also ein Maximum, oder ein Minimum seyn, wenn ihre Erstefunktion y' Null ist; und sie wird insbesondere, ein Minimum seyn, wenn die Zweytefunktion y'' zugleicher Zeit eine positive Größe ist; und ein Maximum, wenn y'' eine negative Größe ist: Hierin bestehet eigentlich die bekannte Methode von Maximum und Minimum.

132.

Aber es wird nicht unnütz seyn zu zeigen, wie sich diese Methode ohne die zwischen Betrachtung der Curven, directe aus der Analysis der Funktionen ableiten läßt.

Es sey fx die Funktion von x, von welcher man das Maximum oder das Minimum verlangt. Es sey a der Werth von x, welcher dem Maximum oder dem Minimum entspricht, so muß der Werth von fa immer größer oder immer kleiner als der Werth von $f(a+i)$, seyn was auch immer die Größe i seyn mag, positiv oder negativ, und so klein als sie auch immer seyn mag. Ich sage so klein als auch immer die Größe i seyn mag, den

eine

ie Größe wird ein Maximum oder ein Minimum, nn sie an der Grenze das Ende ihres Wachsthums oder ter Abnahme kommt; dergestalt daß unter und über eser Grenze, sie sich kleiner im Fall des Maximum, er größer im Fall des Minimum befindet, als in r nemlichen Grenze.

Wir wollen x an der Stelle von a beibehalten, so ird die Bedingung des Maximum seyn:

$$f(x + i) < fx,$$

oder $f(x + i) - fx < 0,$

nd die vom Minimum wird seyn:

$$f(x + i) > fx,$$

oder $f(x + i) - fx > 0,$

ie klein auch i immer seyn mag, positiv oder negativ.

Wir wollen die Funktion $f(x + i)$ vermittelst der ormel (no. 53) in einer Reihe entwickeln, und zuförerst bey den ersten zwey Gliedern verweilen, man wird lchergestalt haben:

$$f(x + i) = fx + i f'x + \frac{i^2}{2} f''(x + j),$$

o j eine, zwischen den Grenzen o und i enthaltene röße ist.

Man muß also für das Maximum:

$$if'x + \frac{i^2}{2} f''(x + j) < 0,$$

nd für das Minimum > 0 haben.

Da wir bereits (no. 110) gesehen haben, daß man klein genug nehmen kann, damit der absolute Werth es Gliedes $if'x$ größer sey als der Werth des Gliedes $\frac{i^2}{2} f''(x + j)$, und daß alsdann dieses auch für jeden ienern Werth von i statt findet. Die Größe

$if'x$

$$if'x + \frac{i^2}{2} f''(x + j)$$

wird alsdann positiv oder negativ, je nachdem es die Größe $if'x$ seyn wird; aber diese hier, ändert das Zeichen mit der Größe i; es wird also unmöglich seyn, daß die Bedingung des Maximum oder Minimum statt habe, wenn man nicht wenigstens $fx = o$ hat.

Wir wollen in der Entwickelung von $f(x + i)$ ein Glied mehr nehmen, so werden wir

$$f(x + i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \frac{i^3}{2.3} f'''(x+i)$$

haben; daher muß man wegen $f'x = o$, für das Maximum

$$\frac{i^2}{2} f''x + \frac{i^3}{2.3} f'''(x + j) < o,$$

und für das Minimum $> o$ haben.

Man kann auch i klein genug nehmen, damit der absolute Werth des Gliedes

$$\frac{i^2}{2} f''x$$

größer sey als der Werth von

$$\frac{i^3}{2.3} f'''(x + i).$$

Alsdann wird die Größe

$$\frac{i^2}{2} f''x + \frac{i^3}{2.3} f'''(x + j)$$

positiv oder negativ seyn, je nachdem es die Größe

$$\frac{i^2}{2} f''x$$

seyn wird.

Weil also der Werth von i^2 immer positiv ist, so muß man für das Maximum

$f''x$

$$f'' < 0$$

und für das Minimum

$$f'' > 0$$

haben.

Hätte man $f''x = 0$, und nimmt die Entwickelung von $f(x + i)$ wiederum vor, und zwar ein Glied weiter, so hat man:

$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \frac{i^3}{2.3} f'''x + \frac{i^4}{2.3.4} f^{IV}(x+j);$$

Also, da man $f'x = 0$ und $f''x = 0$ setzt, so hätte man, für das Maximum, die Bedingung

$$\frac{i^3}{2.3} f'''x + \frac{i^4}{2.3.4} f^{IV}(x + j) < 0;$$

und für das Minimum, die entgegengesetzte Bedingung.

Man kann aber i klein genug nehmen, damit der absolute Werth des Gliedes

$$\frac{i^3}{2.3} f'''x$$

den Werth von dem Gliede

$$\frac{i^4}{2.3.4} f^{IV}(x + j)$$

übertreffe; Alsdann wird der Werth von

$$\frac{i^3}{2.3} f'''x + \frac{i^4}{2.3.4} f^{IV}(x + j)$$

positiv oder negativ seyn, je nachdem es der Werth von $\frac{i^3}{2.3} fx$ ist; dieses aber ändert das Zeichen mit der Größe i; es ist also unmöglich daß die Bedingung des Maximum oder des Minimum statt findet, wenn man nicht wenigstens $f'''x = 0$ hat.

Wenden wir in der Entwickelung von $f(x + i)$ noch das folgende Glied an, so hat man

$f(x+i)$

$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2}f''x + \frac{i^3}{2\cdot 3}f'''x + \frac{i^4}{2\cdot 3\cdot 4}f^{IV}x + \frac{i^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}f^{V}(x+i);$$

und die Bedingungen des Maximum oder des Minimum werden

$$\frac{i^4}{2\cdot 3\cdot 4}f^{IV}x + \frac{i^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}f^{V}(x+i) < o \text{ oder } > o,$$

wegen $f'x = o$, $f''x = o$ und $f'''x = o$.

Man würde hier wie oben darthun, daß man i klein genug nehmen könnte, damit das mit i^4 behaftete Glied, absolut genommen, d. h. von den Zeichen abstrahirt, größer wird, als das andere mit i^5 behaftete Glied, folglich die Summe beyder Glieder nothwendig positiv oder negativ sey, je nachdem es das Glied

$$\frac{i^4}{2\cdot 3\cdot 4}f^{IV}x$$

seyn wird. Woraus, weil i^4 immer eine positive Größe ist, leicht geschlossen wird; daß man für das Maximum $f^{IV}x < o$, und für das Minimum $f^{IV}x > o$ habe; u. s. w.

113.

Also allgemein, wenn y eine beliebige Funktion von x ist, so wird man zuvörderst, für das Maximum oder das Minimum die Bedingung $y' = o$ haben, welche den Werth von x geben wird, nachher $y'' < o$ oder $> o$, welches mit dem, was wir oben gefunden haben stimmt (Nr. 131). Aber wir haben überdem so eben gefunden, das wenn $y'' = o$, so müßte man auch zugleicher Zeit $y''' = o$ haben, nachher $y^{IV} < o$ für das Maximum, und $y^{IV} > o$ für das Minimum; u. s. w.

Als

Allgemein, wenn eine abgeleitete Funktion von einer beliebigen graden Ordnung verschwindet, so müßte die Funktion von der folgenden ungraden Ordnung auch verschwinden, und die folgende der graden Ordnung müßte negativ für das Maximum, und positiv für das Minimum seyn.

Wenn die Funktion y nur durch eine Gleichung $F(x, y) = o$ gegeben ist, so darf man nur die Erstegleichung nehmen

$$F'(x) + y' F'(y) = o,$$

und $y' = o$ machen, welches sie auf diese bringt: $F'(x) = o$; diese mit $F(x, y) = o$ combinirt, dient die Werthe von x und y welche dem Maximum oder dem Minimum entsprechen, zu bestimmen. Man nimmt ferner die Zweytegleichung, und wenn man eben so $y' = o$ macht so wird man den Werth von y'' haben, in welchen man die für x und y gefundene Werthe substituirt, und aus diesen Werth wird man von dem Maximum oder dem Minimum urtheilen können; u. s. w.

Wenn die Funktion y'', oder $f'' x$, unendlich würde, d. h., wenn $\frac{1}{y''} = o$, so wäre dieses ein Zeichen daß die Entwickelung von $f(x + i)$, für den gefundenen Werth von x, ein Glied von der Form Ai^m enthielte, wo m zwischen 1 und 2 ist (Nr. 41); und wenn man die Curve von der Gleichung $y = fx$ betrachtet, so könnte man durch die Form ihres Weges in dem gegebenen Punkt erkennen, ob die Funktion y ein Maximum oder ein Minimum ist (Nr. 120). Man könnte selbst dafür allgemeine Regeln geben, die uns aber zu weit von unsern Gegenstande abführen würden.

Wir halten uns nicht auf zu den vorhergehenden Regeln die Bestimmung der Maxima und Minima betreffend, Beyspiele zu geben; da sie in allem vollkommen mit derjenigen übereinstimmt, welche man nach der Differentialrechnung kennt, so könnte man davon dieselben Anwendungen machen.

134.

Ich komme jetzt zur Bestimmung der Flächenräume der Curven, welche man gemeiniglich Quadratur der Curven nennt. Wir wollen allgemein die durch die Gleichung $y = fx$ vorgestellte Curve betrachten, wo y eine rechtwinklichte Ordinate ist, die der Abscisse x von welcher sie eine gegebene Funktion ist, entspricht. Der durch diese Curve, Abscissenaxe und eine beliebige Ordinate begrenzte Raum, wird also auch durch eine Funktion von der nemlichen Abscisse x, die wir durch Fx bezeichnen, bestimmt werden. Gesetzt das x, $x + i$ werde, diese Funktion würde $F(x + i)$, und es ist klar, daß alsdann $F(x + i) - Fx$ der Theil des Raums seyn wird, welcher dem Theil i der Axe entspricht, und von den beyden Ordinaten fx und $f(x + i)$, welche den Abscissen x und $x +$ entsprechen, begrenzt ist. Aber, welches auch immer die vorgegebene Curve seyn mag, so ist es leicht sich zu überzeugen, selbst ohne Figur, daß wenn die Ordinaten zunehmend, oder abnehmend fortschreiten, von fx an bis $f(x + i)$, so wird der besagte Raum, im ersten Falle, größer als das Rechteck ifx, und kleiner als das Rechteck $if(x + i)$ seyn, und im zweyten Falle, größer als das letzte und kleiner als das erste. Er wird also nothwendig immer zwischen diesen Grenzen ifx und $if(x + i)$ eingeschlossen seyn, welche folglich die Grenzen der Größe

$F(x + i) - Fx$ die denſelben Raum vorſtellt ſeyn rden.

Laßt uns die Funktionen

$$f(x + i) \text{ und } F(x + i)$$

ch der Fomel in Nr. 53 entwickeln, und bey dem erſten iede der erſten Funktion, und bey den zwey erſten Glie- rn der zweyten Funktion innehalten, ſo wird man ha- n:

$$f(x + i) = fx + i f'(x + j)$$

$$\text{und } F(x + i) = Fx + i F'x + \frac{i^2}{2} F''(x + j),$$

j eine unbeſtimmte Größe iſt, die nicht für beyde nktionen einerley ſeyn kann, die aber immer zwiſchen n Grenzen o und i enthalten ſeyn muß. Es müßte al- die Funktion Fx ſo beſchaffen ſeyn daß die Größe

$$iF'x + \frac{i^2}{2} F''(x + j)$$

wiſchen den Grenzen

$$ifx \text{ und } ifx + i^2 f'(x + j)$$

nthalten wäre, was auch immer der Werth von i ſeyn ag, und folglich auch wenn man i ſo klein als man will nmt.

Da nun die Intervalle zwiſchen beyden Grenzen

$$i^2 f'(x + j)$$

t, ſo ſollte die Differenz von der beſagten Größe und ei- er der Grenzen, nemlich

$$i(F'x - fx) + \frac{i^2}{2} F''(x + i)$$

einer ſeyn als

$$i^2 f'(x + j);$$

on den Zeichen dieſer Größen abſtrahirt.

Es iſt aber leicht zu beweiſen daß dieſe Bedingung

nicht für jeden noch so kleinen Werth von i stati
wenn nicht wenigstens daß mit i behaftete Glied ver
det; den sonst könnte man immer i so nehmen daß
Größe größer als die zweyte würde, weil es da
länglich ist, daß i kleiner als

$$\frac{F'x - fx}{f'(x+i) - \frac{1}{2}F''(x+i)}$$

sey. Man hätte also nothwendigerweise $F'x = fx$
diese Bedingung ist zur Bestimmung der Funktion I
länglich, weil man sieht daß sie nichts anders sey
als die ursprüngliche Funktion von fx.

Also, allgemein, die Erstefunktion von der Fu
welche den Flächenraum der Curve durch die Abscis
drückt, ist die Funktion welche die Ordinate dieser
vorstellt; und umgekehrt, die Funktion welche den
chenraum ausdrückt kann keine andre seyn als d
sprüngliche Funktion von derjenigen die die Ordinat
drückt.

Wenn also die Gleichung einer Curve gegeben
braucht man, um den Ausdruck für den Flächen
d. h. die Quadratur der Curve zu haben, nur di
sprüngliche Funktion derjenigen zu suchen die die O
te vorstellt, und man könnte zu dieser ursprünglichen
tion eine willkührliche beständige Größe hinzusetzen
62), welche man durch die Bedingung daß der Aus
des Flächenraums an dem Punkt wo man sie wollt
fangen lassen Null wird, bestimmt.

Wir haben in der vorhergehenden Analysis vora
setzt, daß die Ordinaten zu oder abnehmend fortsch
von fx bis $f(x+i)$, diese Bedingung würde nicht
haben, wenn zwischen diesen beyden Ordinaten ein
ximum oder ein Minimum wäre. Aber, da ma

ıtervalle i ſo klein als man will nehmen kann, ſo iſt
ır, daß man die zweyte Ordinate $f(x + i)$ immer
ſſeits des Maximum oder des Minimum fallen laſſen
nnte; und daß folglich die daraus gezogene Concluſion,
mer dieſelbe bliebe.

Wenn die Funktion fx den Flächenraum von dem
hnitte eines Körpers ausdrückte, der ſenkrecht auf
: Abſciſſe x gemacht iſt, ſo würde man auf die
mliche Art beweiſen daß der körperliche Raum durch die
ſprüngliche Funktion fx ausgedrückt würde. Denn be-
chnete man durch Fx den Körperlichenraum, ſo drückt
: Differenz

$$F(x + i) - Fx$$

n Theil des Körpers aus, welcher zwiſchen den beyden
ırchſchnitten $f(x + i)$ und fx enthalten iſt, und dieſer
)eil wäre nothwendigerweiſe zwiſchen den beyden prisma-
hen Körpern ifx und $if(x + i)$ enthalten, indem
ın die Größe i ſo klein als man will nimmt, hieraus
ließt man wie oben, $F'x = fx$.

135.

Das Problem von der Quadratur der Curven iſt,
; man ſieht, das einfachſte Problem der umgekehrten
alyſis der Funktionen, weil es nur darin beſteht ei-
urſprüngliche Funktion von einer gegebenen Funktion
finden. Wir haben im erſten Theile (Nr. 64 etc.) die
ittel angegeben, durch welche man dieſe Unterſuchungen
:ichtern kann; wir fügen eine weſentliche Bemerkung

Da es öfters vortheilhaft iſt, andere veränderliche
ößen an die Stelle derjenigen zu ſetzen die in die Funk-
ı hineinkommen, um dieſe Funktion zu vereinfachen

oder in andere einfachere zu zerlegen, so muß man alsdann nicht vergessen, die in Rede stehende Funktion durch die Erstefunktion von ihrer veränderlichen Größe zu multipliciren. In der That, wenn man u den Flächenraum der Curve wovon y die Ordinate ist nennt, und y und u als Funktionen von x ansiehet, so haben wir eben gesehen daß man $u' = y$ hat; nimmt man aber an daß x die Funktion von einer andern veränderlichen Größe ist, und man durch x' und u' die Erstenfunktionen von x und u in Beziehung dieser neuen veränderlichen Größe genommen, bezeichnet, so müßte man $\frac{u'}{x'}$ an die Stelle von u' setzen (Nr. 63), dieses gäbe $u' = yx'$; und eben so von den andern ähnlichen Formeln.

136.

Nach dem Problem der Quadratur der Curven, folgt ganz natürlich das Problem ihrer Rectification, d. h. von der Bestimmung der Länge der Curve selbst.

Wir gehen, um dieses Problem aufzulösen, von dem Grundsatz des Archimedes aus, welcher von allen alten und neuen Geometern angenommen ist, nach welchem von zwey Curven, oder von zwey aus graden zusammengesetzten Linien, die ihre Concavität nach einerley Seite hinwenden, und dieselben Glieder haben, diejenige welche die andere einschließt die längste ist. Hieraus folgt daß ein Bogen von einer gänzlich nach einer Seite concaven Curve, größer als seine Sehne ist, und zugleich Zeit kleiner als die Summe der beyden Tangenten, welche an beyde Enden des Bogens gezogen und zwischen diesen Enden und ihren Durchschnittspunkt enthalten sind. Hieraus kann man ferner folgern, daß die Länge desselben

Bogens

bogens ſich zwiſchen der Länge der beyden an ſeinen En-
en gezogenen Tangenten befindet und welche durch die
en Enden des Bogens zugehören, wenn es nöthig iſt
ber die Curve hinaus verlängerten Ordinaten begrenzt
nd.

In der That, nachdem man die Sehne, welche bey-
e Enden des Bogens verbindet, gezogen hat, ſo iſt es
icht zu ſehen daß die eine der beyden Tangenten die pa-
allelen Ordinaten unter einen kleinern ſpitzen Winkel als
ie Sehne treffen wird, und daß die andere Tangente die
rdinaten unter einen weniger ſpitzigen Winkel begegnen
ird, und daher iſt, die Sehne kleiner als die erſte,
ieſer Tangenten, und länger als die zweyte; mithin
ird dieſe Sehne, um ſo mehr, kleiner als der Bogen
er Curve ſeyn. Wenn man ferner die am Scheitel ent-
egengeſetzten, und durch den Durchſchnitt der beyden
angenten gebildeten Dreyecke betrachtet, ſo iſt ſichtbar
aß die beyden Theile der erſten Tangente reſpective län-
er als die Theile der zweyten ſind, weil die durch jene
heile gebildeten Seiten, größern Winkeln, als die durch
ieſe Theile gebildeten Seiten, gegenüberſtehen. Die er-
e ganze Tangente iſt alſo länger als die Summe der
yden Theile der Tangenten, welche zwiſchen ihren Durch-
nittspunkt und den Enden des Bogens liegen. Die
angente iſt daher auch länger als der Bogen.

Dieſes feſtgeſetzt, ſo iſt $f'x$, (Nr. 114, wenn fx die
der Abſciſſe gehörige Ordinate iſt) die Tangente des
inkels, unter welchen die Tangente der Curve, die Ab-
iſſen Axe am Ende dieſer Ordinate begegnet. Alſo iſt

$$\sqrt{[i^2 + (i f' x)^2]} = i\sqrt{[1 + (f' x)^2]}$$

erjenige Theil dieſer Tangente, welcher zwiſchen der Or-
nate fx und der Ordinate $f(x + i)$ enthalten iſt, wo

die letztere Ordinate von der erſteren um die Intervalle i entfernt iſt.

Auf eben die Art, hat man $f'(x + i)$ für die Tangente des Winkels, unter welchem die Tangente der Curve die Axe am Ende der Ordinate $f(x + i)$ begegnet, und man findet $i\sqrt{(1 + [f'(x + i)]^2)}$ für den Theil dieſer Tangente, welcher zwiſchen den nemlichen Ordinaten fx und $f(x + i)$ enthalten iſt.

Mehrerer Einfachheit wegen ſey

$$\varphi x = \sqrt{[1 + (f'x)^2]},$$

ſo hat man $i\varphi x$ und $i\varphi(x + i)$

für die beyden an beyde Enden desjenigen Bogens der Curve, welcher zwiſchen den Ordinaten fx und $f(x + i)$ liegt, gezogene Tangenten und die bey dieſelben Ordinaten begrenzt ſind; die Länge dieſes Bogens muß alſo zwiſchen den beyden Größen

$$i\varphi x \text{ und } i\varphi(x + i)$$

enthalten ſeyn, wenn man i einen ſo kleinen Werth als man nur will giebt.

Wenn alſo Φx die Funktion von x iſt die den Bogen der Curve ausdrückt, ſo muß die Größe.

$$\Phi(x + i) - \Phi x,$$

welche der Ausdruck des zwiſchen der Ordinate fx und $f(x + i)$ enthaltenen Bogens iſt, zwiſchen den Größen

$$i\varphi x \text{ und } \varphi i(x + i)$$

enthalten ſeyn, wie klein i auch immer ſeyn mag. Hieraus ſchließt man, nach einem ähnlichen Räiſonnement wie das von Nr. 134, daß $\Phi' x = \varphi x$. Um alſo die unbegrenzte Länge der Curve zu haben, ſo müßte man die urſprüngliche Funktion von der Funktion φx ſuchen, oder

$$\sqrt{[1 + (f'x)^2]};$$

und da man zu der urſprünglichen Funktion eine willkühr-

liche

liche beſtändige Größe zuſetzen kann, ſo müßte man dieſe beſtändige Größe dergeſtalt beſtimmen daß der Ausdruck des Bogens an dem Punkt verſchwinde wo man wollte den Bogen anfangen laſſen.

Nimmt man daher s denjenigen Bogen der Curve deren Coordinaten x und y ſind, und ſieht man y und s als Funktionen von x an, ſo hat man die Gleichung:

$$s' = \sqrt{(1 + y'^2)},$$

wegen $y = fx$ und $y' = f'x$.

Und, wenn x und y in Funktionen einer andern veränderlichen Größe, wie t, gegeben wären, man ferner durch x', y', s', die Erſtenfunktionen in Beziehung dieſer veränderlichen Größe bezeichnete, ſo müßte man $\frac{y'}{x'}$ und $\frac{s'}{x'}$ an die Stelle von y' und s' ſetzen (Nr. 63), welches zwiſchen den Coordinaten und Bogen folgende Gleichung gäbe:

$$s' = \sqrt{(x'^2 + y'^2)}.$$

137.

Wenn man bedenkt, daß, wenn die vorgegebene Curve ſich um die Abſciſſenaxe dreht, ſie eine Connoide erzeugt, ſo iſt ſichtbar daß die beyden Ordinaten

$$fx, \quad f(x + i)$$

zugleicher Zeit zwey Kreiſe beſchreiben deren Halbmeſſer dieſe Coordinaten ſind, daß der zwiſchen jenen beyden Coordinaten enthaltene Bogen der Curve eine conoidiſche Zone beſchreiben wird, und daß die zwey an beyden Enden des Bogens gezogenen Tangenten coniſche Zonen beſchreiben, zwiſchen welchen die conoidiſche Zone nothwendig enthalten ſeyn muß. Man weiß aber aus der Geometrie, daß

die krumme Oberfläche eines *) graden abgestumpften Kegels gleich ist dem Producte aus seiner Seite in die halben Summe der Peripherie der beyden Grundflächen.

Bezeichnet man daher die Peripherie des Kreises dessen Halbmesser 1 ist mit π, so wird

$$i\varphi x\pi\left(fx + \frac{i}{2} f'x\right)$$

die Oberfläche der conischen Zonen seyn die durch die Tangente $i\varphi x$ beschrieben ist, weil fx der eine und $fx + if'x$ der andere Halbmesser der beyden Grundflächen ist; und die Oberfläche der andern Zone, die durch die Tangente $i\varphi(x + i)$ beschrieben ist, wird seyn:

$$i\varphi(x + i)\pi\left[f(x + i) - \frac{i}{2} f'(x + i)\right]$$

denn es ist leicht zu sehen daß die Halbmesser der Grundflächen dieses abgestumpften Kegels,

$$f(x + i)$$

und $f(x + i) - if'(x + i)$

seyn werden.

Wenn man daher die Funktion der Abscisse x die die Oberfläche der Conoide ausdrückt, durch Φx bezeichnet, so ist klar daß die conoidische Zone durch die Differenz

$$\Phi(x + i) - \Phi x$$

ausgedrückt ist, und daß diese Differenz zwischen den beyden Größen

$$i\pi\varphi x\left(fx + \frac{i}{2} f'x\right)$$

und $i\pi\varphi(x + i)\left[f(x + i) - \frac{i}{2} f'(x + i)\right]$

enthalten seyn muß, wenn man i einen beliebigen auch noch so kleinen Werth giebt.

Her-

*) Im Original fehlt das Prädicat grade

Hieraus kann man folgern, und zwar durch ein ähnliches Raisonnement wie in Nr 134, daß diese Bedingung nicht statt finden kann, wenn man nicht wenigstens

$$\Phi' x = \pm \phi x \cdot fx = \pm f x \sqrt{[1 + (f'x)^2]}$$

hat.

Mithin wird man die Oberfläche der vorgegebenen Conoide haben, wenn man die ursprüngliche Funktion, von der Funktion

$$\pm fx \sqrt{[1 + (f'x)^2]}$$
$$\text{oder} \pm y \sqrt{(1 + y'^2)}$$

nimmt.

138.

Allgemein, wir wollen voraussetzen daß man die Funktion Fx vermittelst folgender Bedingung suche, daß die Differenz

$$F(x + i) - Fx$$

zwischen die beyden Größen

$$i f(x, i) \text{ und } i \phi(x, i),$$

enthalten sey, wo f und ϕ solche gegebene Funktionen von x und i bezeichnen, daß wenn man $i = o$ macht; man $fx = \phi x$ hat, und daß diese Bedingung für jeden beliebigen noch so kleinen Werth von i statt habe.

Wenn man den Lehrsatz von Nr. 52 und 53 anwendet, so bringt man die Funktion $F(x + i)$ auf

$$Fx + i F'x + \frac{i^2}{2} F''(x + i),$$

und die Funktionen

$$f(x, i), \phi(x, i)$$

auf

$$fx + i f'(x, i)$$
$$\phi x + i \phi'(x, i).$$

Die

Die Größe j ist hier überall unbestimmt, aber zw
schen den Grenzen o und i enthalten und verschieden
den verschiedenen Funktionen, die durch F F' bezeichn
ten abgeleiteten Funktionen, beziehen sich auf die verä
derliche Größe x, und die durch f', φ' bezeichneten, abg
leiteten Funktionen beziehen sich auf die veränd
liche Größe i. Wenn man also $fx = \varphi x$ annimmt,
reduzirt sich die besagte Bedingung darauf, zu bewerkste
ligen daß die Größe

$$iF'x + \frac{i^2}{2} F''(x + j)\,\varepsilon$$

zwischen den beyden Größen

$$if x + i^2 f'(x, j)$$

$$\text{und } if x + i^2 \varphi'(x, j)$$

enthalten ist, wie klein auch der Werth von i immer seyn
kann.

Es müßte also die Differenz

$$i(F'x - fx) + i^2 \left[\tfrac{1}{2} F''(x + j) - f'(x, j)\right]$$

niemals größer als die Differenz

$$i^2 [\varphi'(x, j) - f'(x, j)]$$

seyn; so lange aber das durch die erste Potenz von
multiplicirte Glied nicht Null ist, so könnte man immer
klein genung nehmen, damit die erste Größe größer als
die zweyte werde, denn hierzu wäre es hinlänglich i klei
ner als die Größe

$$\frac{F'x - fx}{\varphi'(x, j) - \frac{1}{2} F''(x + j)},$$

zu nehmen, von den Zeichen dieser Größe abstrahirt.

Die vorgegebene Bedingung bringt also nothwendig
diese hier

$$F'x - fx = o,$$

mit sich, und folglich $F'x = fx$;

d. i

d. h. die gesuchte Funktion Fx, sollte die ursprüngliche Funktion von fx seyn; und um den vollständigen Werth von Fx zu haben, so müßte man dazu eine willkührliche beständige Größe haben, welche man durch die Bedingungen der Frage bestimmte.

139.

Die ebenen Curven (courbes planes) gehören zur Geometrie von zwey Dimensionen, und hängen daher nur von zwey Coordinaten ab. Die Curven von doppelter Krümmung (courbes à double courbure) gehören zur Geometrie von drey Dimensionen, weil sie nur auf die Oberflächen fester Körper verzeichnet werden können; auch hängen sie von dreyen unter sich senkrechten Coordinaten ab, wovon zwey Funktionen der dritten sind, dergestalt daß sie nichts anders dargestellt werden können als durch zwey Gleichungen zwischen drey unbestimmten Größen.

Es sey demnach für eine beliebige Curve von doppelter Krümmung $y = fx$, $z = \varphi x$, wo x, y, z die drey rechtwinklichte Coordinaten sind. Es sey gleichfalls für eine andere gegebene Curve $q = Fp$, $r = \Phi p$; wo p, q, r, ebenfalls ihre drey Coordinaten (auf dieselbe Axe bezogen als die vorhergehenden) sind. Will man daß diese zwey Curven für die Abscisse x einen Punkt gemein haben, so muß man wenn man $p = x$ macht, auch haben $q = y$ und $r = z$; also $y = Fx$ und $z = \Phi x$.

Für irgend einen andern der Abscisse $x + i$ zugehörigen Punkt, sind $f(x + i)$, $\varphi(x + i)$ die Ordinaten y und z, und $F(x + i)$, $\Phi(x + i)$ sind die Ordinaten q, r; macht man um abzukürzen

$$\delta = f(x + i) - F(x + i),$$
$$\vartheta = \varphi(x + i) - \Phi(x + i),$$

so

ſo iſt leicht wahrzunehmen daß die Entfernung D zwiſchen den beyden Curven die zur der nemlichen Abſciſſe $x + i$ gehört, ausgedrückt wird durch

$$D = \sqrt{(\delta^2 + \delta'^2)}.$$

Hieraus beweißt man durch eine ähnliche Analyſis als die welche zu Anfange dieſes zweyten Theils entwickelt iſt, daß wenn

$$f'x = F'x, \quad \phi'x = \Phi'x$$

ſo wäre es unmöglich daß irgend eine andere gegebene Curve die nicht den nemlichen Bedingungen genüge leiſtete zwiſchen den beyden genannten Curven durchgehen könnte;

Wenn man ferner

$$f''x = F''x \text{ und } \phi''x = \Phi''x$$

hätte, ſo würde man auf die nemliche Art beweiſen, daß keine andere Curve für welche dieſe Gleichungen nicht ſtatt finden, nicht zwiſchen den nemlichen Curven durchgehen könnte; u. ſ. w.

Wenn man alſo bey den Curven von doppelter Krümmung die nemlichen Begriffe von verſchiedenen Ordnungen der Berührung der gewöhnlichen Curven anwendet, ſo wird man daraus folgern daß die zwey erſten Bedingungen eine Berührung der erſten Ordnung beſtimmen werden, daß die zwey folgenden Bedingungen eine Berührung der zweyten Ordnung beſtimmen; u. ſ. w.

Allgemein, wenn man x, y, z die Coordinaten einer vorgegebenen Curve nennt, und p, q, r die Coordinaten der gegebenen Curve, für welche man die Bedingungen einer Berührung von einer gegebenen Ordnung mit der vorgegebenen Curve verlangt, wenn

$$F(p, q, r) = 0,$$

$$\text{und } \Phi(p, q, r) = 0$$

die zwey Gleichungen der gegebenen Curve ſind, ſo hat man

an für die Berührung der erſten Ordnung, die vier
Gleichungen

$$F(x, y, z) = 0,$$
$$F(x, y, z)' = 0,$$
$$\Phi(x, y, z) = 0,$$
$$\Phi(x, y, z)' = 0,$$

für eine Berührung der 2ten Ordnung, hat man noch
dieſe zwey Gleichungen mehr

$$F(x, y, z)'' = 0$$
$$\Phi(x, y, z)'' = 0;$$

. ſ. w. indem man, in dieſen abgeleiteten Funktionen,
und z als Funktionen von x anſieht.

Man befriedigt dieſe Gleichungen vermittelſt der
eſtändigen Größen a, b, c, etc. die in die gegebenen
unktionen

$$F(p, q, r) \text{ und } \Phi(p, q, r)$$

nein kommen, und welche man wie oben (Nr. 117)
lemente der Berührung nennen könnte, wenn ſie
i Funktionen von x, y, z, y', z', etc. beſtimmt ſeyn
erden.

140.

Wir wollen für die gegebene Curve eine durch die
wey Gleichungen

$$q = a + bp,$$
$$r = c + dp$$

eſtimmte grade Linie wählen; damit ſie eine Berührung
er erſten Ordnung habe, d. h. damit ſie Tangente ei-
er beliebigen vorgegebenen Curve ſey und auf den Coor-
naten x, y, z bezogen iſt, ſo wird man folgende vier
leichungen haben:

y=a

$$y = a + bx,$$
$$z = c + dx,$$
$$y' = b,$$
$$z' = d;$$

Woraus man ziehet

$$a = y - y'x,$$
$$c = z - z'x.$$

Daher werden die Gleichungen der Tangente auf die Coordinaten p, q, r bezogen, seyn:

$$q = y - y'x + y'p,$$
$$r = z - z'x + z'p.$$

Es ist leicht zu sehen daß diese zwey Gleichungen die zwey Tangenten der ebenen Curven vorstellen welche die Projectionen der vorgegebenen Curve auf die beyden Ebenen der x und y und der x und z bilden (Nr. 113); Um also eine Tangente an einer Curve von doppelter Krümmung zu ziehen, wird es allezeit hinlänglich seyn die Tangenten an ihre beyden Projectionen zu ziehen und die gerade Linie von denen die beyden Tangenten die Projektionen seyn werden, wird die gesuchte Tangente seyn.

141.

Gesetzt man verlangte den Krümmungskreis einer Curve von doppelter Krümmung.

Um auf die einfachste Art, die allgemeinen Gleichunchen eines auf einer beliebigen Ebene gezeichneten Kreises zu haben, wollen wir den Kreis als durch den Durchschnitt einer Ebene welche durch den Mittelpunkt einer Kugel geht entstanden betrachten; der Halbmesser und der Mittelpunkt der Kugel werden alsdann jene des Kreises, und die Ebene wird die Ebene des Kreises selbst.

Die allgemeine Gleichung einer Kugel auf die drey Coordinaten p, q, r, bezogen, iſt:

$$(p - a)^2 + (q - b)^2 + (r - c)^2 = d^2,$$

wo a, b, c die Coordinaten des Mittelpunkts und d der Halbmeſſer ſind.

Die Gleichung einer Ebene welche auf die nemlichen Coordinaten bezogen iſt, und durch den Punkt der den Coordinaten a, b, c entſpricht, iſt allgemein:

$$p - a + m(q - b) + n(r - c) = o,$$

wo m und n zwey willkührliche beſtändige Größen ſind, welche die Neigung der Ebene in Beziehung auf die fixen Ebenen der Coordinaten beſtimmt. Das Syſtem dieſer zwey Gleichungen wird alſo einen Kreis darſtellen deſſen Halbmeſſer d ſeyn wird, deſſen Mittelpunkt durch die Coordinaten a, b, c beſtimmt, und deſſen Ebene von den Größen m und n abhängen wird.

Wenn man alſo in dieſen Gleichungen die Größen p, q, r, in x, y, z verwandelt, und man davon die Erſten und Zweyten-Gleichungen nimmt, ſo wird man folgende ſechs Gleichungen haben:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = d^2,$$
$$x - a + m(y - b) + n(z - c) = o,$$
$$x - a + y'(y - b) + z'(z - c) = o,$$
$$1 + my' + nz' = o$$
$$1 + y'^2 + z'^2 + y''(y - b) + z''(z - c) = o$$
$$my'' + nz'' = o,$$

wovon die vier erſten die nöthigen Bedingungen enthalten damit der in Rede ſtehende Kreis eine Berührung der erſten Ordnung mit jeder Curve von doppelter Krümmung habe, von der x, y, z die Coordinaten, x und z aber in Funktionen von x gegeben ſind; und wenn man dazu die zwey letzten ſetzt, ſo wird man die nöthigen Be-

dingungen für eine Berührung der zweyten Ordnung haben, d. h. damit der Kreis, Krümmungskreis der Curve werde.

Da in diese Gleichungen sechs unbestimmte Größen, a, b, c, d, m und n sind, so könnte man allen diesen Bedingungen genüge leisten, und der Krümmungskreis wird der Größe und Lage nach bestimmt seyn. Wenn man aber nur einen Berührungskreis verlangte, so bleiben zwey unbestimmte Größen, für welche man den Halbmesser d nehmen könnte; und eine der beyden Größen m und n. In diesem Falle also, wird die Gleichung

$$x - a + y'(y - b) + z'(z - c) = o$$

die Ebene bestimmen in welcher sich die Mittelpunkte aller Kreise finden werden die Berührungskreise seyn können; und da der Halbmesser des Berührungskreises nothwendig auf die Curve senkrecht ist, so wird diese Gleichung die Gleichung einer auf der Curve senkrechten Ebene seyn, wenn man a, b, c für die Coordinaten der Ebene nimmt.

Wir wollen jetzt die Berührung der zweyten Ordnung betrachten. Die drey ersten Gleichungen werden, wenn man um abzukürzen,

$R = \sqrt{[(ny' - mz')^2 + (n - z')^2 + (m - y')^2]}$

macht, geben:

$$x - a = \frac{(ny' - mz')d}{R},$$

$$y - b = -\frac{(n - z')d}{R},$$

$$z - c = \frac{(m - y')d}{R},$$

Wenn diese Werthe in der fünften Gleichung substituirt werden, so zieht man daraus

d =

$$d = \frac{(1 + y'^2 + z'^2)R}{(n - z')y'' - (m - y')z''}.$$

Endlich, die vierte und die sechste Gleichung werden geben

$$m = \frac{z''}{z'y'' - y'z''}p,$$

$$n = -\frac{y''}{z'y'' - y'z''}p,$$

Werthe welche man in den vorhergehenden Ausdrücken substituiren wird.

Man wird endlich, nach jenen Reductionen haben,

$$d = -\frac{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{[(1+y'^2+z'^2)(y''^2+z''^2)-(y'y''+z'z'')^2]}},$$

$$a = x - \frac{(1+y'^2+z'^2)(y'y''+z'z'')}{(1+y'^2+z'^2)(y''^2+z''^2)-(y'y''+z'z'')^2},$$

$$b = y + \frac{(1+y'^2+z'^2)y'' - y'(1+y'^2+z'^2)(y'y''+z'z'')}{(1+y'^2+z'^2)(y''^2+z''^2)-(y'y''+z'z'')^2},$$

$$c = z + \frac{(1+y'^2+z'^2)z'' - z'(1+y'^2+z'^2)(y'y''+z'z'')}{(1+y'^2+z'^2)(y''^2+z''^2)-(y'y''+z'z'')^2}.$$

Die Größe d wird der Krümmungshalbmesser der vorgegebenen Curve seyn; und die Größen a, b, c werden die Coordinaten von der Curve seyn, worin alle Mittelpunkte der Krümmungskreise liegen; aber diese Curve ist dieses wegen noch keine Abgewickelte, wie in den Curven von einfacher Krümmung.

142.

Um sich davon zu versichern, und zugleicher Zeit die nöthigen Bedingungen zu finden, damit sie eine abgewickelte der Curve von doppelter Krümmung werde, so darf man nur ähnliche Betrachtungen wie Nr. 130. anwenden.

Nehmen wir die Werthe von a, b, c wiederum vor, welche aus den drey erſten Gleichungen gezogen ſind, ſo werden wir haben:

$$a = x - \frac{(ny' - mz')d}{R}$$

$$b = y + \frac{(n - z')d}{R}$$

$$c = z - \frac{(m - y')d}{R}.$$

Dieſe Ausdrücke, wenn man die Größen x, y, z, y', z', eben ſo wie m und n, als beſtändig, und die Größe d allein als veränderlich anſieht, geben die Coordinaten der graden Linie in welcher der Krümmungshalbmeſſer liegt; ſieht man aber alle dieſe Größen als veränderlich, und m, n, d, als in x gegeben an, weil y und z als in x gegeben gedacht ſind, ſo ſtellen alsdann dieſe Ausdrücke die Coordinaten von der Curve der Mittelpunkte vor. Damit aber die grade Linie die Tangente der Curve wird, ſo müſſen die Werthe von $\frac{b'}{a'}$ und $\frac{c'}{a'}$, indem man b und c als Funktionen von a, oder allgemein a, b, c als Funktionen einer andern beliebigen veränderlichen Größe anſieht, in beyden Fällen die nemlichen ſeyn. Die Werthe von $\frac{a'}{d'}$, $\frac{b'}{d'}$, $\frac{c'}{d'}$ ſollten alſo auch die nemlichen ſeyn, es ſey nun daß die Größen a, b, c, d allein veränderlich ſind, oder daß die Größen x, y, z, m und n auch zugleicher Zeit variiren; folglich müſſen die Gleichungen die dieſe Werthe beſtimmen, ebenfalls in beyden Hypotheſen ſtatt haben.

Betrachtet man nun die Gleichungen welche die Größen a, b, c, d; m und n in x, y, y', y'' zu beſtimmen gedient

nt haben, und ſieht alle dieſe Größen als zugleich ver-
derlich an, ſo iſt klar daß die beyden Gleichungen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = d^2$$

b $x - a + y'(y - b) + z'(z - c) = o$

gende mit ſich bringen

$$a'(x - a) - b'(y - b) - c'(z - c) = dd',$$

lche nichts anders als die Erſtegleichung der Erſten iſt,
dem man a, b, c, d allein als veränderlich annimmt.
en ſo die zwey Gleichungen

$$x - a + y'(y - b) + z'(z - c) = o$$

$$1 + y'^2 + z'^2 + y''(y - b) + z''(z - c) = o$$

ngen folgende mit ſich.

$$a' + y'b' + z'c' = o,$$

gleichfalls die Erſtegleichnng der Erſten iſt, indem man
a, b, c als veränderlich nimmt. Dieſe zwey Glei-
ngen haben alſo die verlangte Bedingung, da ſie aber

Beſtimmung der drey Größen $\frac{a'}{d'}$, $\frac{b'}{d'}$, $\frac{c'}{d'}$ nicht

reichen, ſo müßte man auf eben die Art eine dritte
ichung finden welche die Erſtenfunktionen a', b', c' ent-
te; da nun die zwey Vorhergehenden von der Glei-
ag der Kugel abgeleitet ſind, ſo müßte man die Dritte
der Gleichung der Ebene

$$x - a + m(y - b) + n(z - c) = o$$

en, dieſe letztere giebt, wenn man alles variren läßt,
Rückſicht auf die Gleichung

$$1 + my' + nz' = o$$

mit, folgende Gleichung

$$a' - mb' - nc' + m'(y - b) + n'(z - c) = o$$

he, wie man ſieht, die Erſtegleichung der Vorherge-
den iſt, indem man a, b, c, m, n als zugleich verän-
ich annimmt; Mithin wird dieſe Gleichung nicht die

verlangte Bedingung haben, wenn nicht wenigſtens von der Variirung der Größen m und n abhangende Th verſchwindet, d. h. wenn man nicht wenigſtens

$$m'(y - b) + n'(z - c) = 0$$

hat.

Wenn dieſe Bedingung ſtatt findet, alsdann w die übrig bleibende Gleichung $a' + mb' + nc' =$ welche mit den zwey ſo eben gefundenen Gleichungen c hinirt, die Werthe von $\frac{a'}{d'}$, $\frac{b'}{d'}$, $\frac{c'}{d'}$ geben wird, r che die nemlichen ſeyn werden, es ſey daß die Grö a, b, c, d allein veränderlich ſind, oder es ſey daß x z, m und n auch zugleich variiren. Daher wird grade Linie in welcher der Krümmungshalbmeſſer li Tangente an der Curve der Mittelpunkte; alſo wird dieſer Halbmeſſer Tangente von der nemlichen Cu weil er von dieſer Curve begränzt iſt. In dieſen nemli Falle, geben die vorhergehenden Ausdrücke von a, b auf der Stelle die Erſtenfunktionen

$$a' = -\frac{(ny' - mz')d'}{R},$$

$$b' = \frac{(n - z')d'}{R},$$

$$c' = -\frac{(m - y')d'}{R},$$

daraus zieht man

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = d'^2,$$

und daraus

$$d' = \sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2)}.$$

Nun werden wir nachher ſehen (Nr. 144) daß d Gleichung zeigt, daß d der Bogen der Curve iſt, welcher a, b, c die Coordinaten ſind. Der Krümmu

halbmesser wird also nicht allein Tangente der Curve der Mittelpunkte seyn, sondern überdem noch dem Bogen von dieser Curve gleich seyn. Er wird also nichts anders seyn, als die Abwickelung von dieser nemlichen Curve, die folglich die Abgewickelte von der vorgegebenen Curve seyn wird, wovon x, y, z die Coordinaten sind.

143.

Die Bedingung

$$m'(y - b) + n'(z - c) = 0$$

die wir so eben gefunden haben damit die Curve eine Evolute habe, hat augenscheinlich statt, wenn m und n beständig sind. Sind diese Größen nicht beständig, so werden sie die Berührungsebene der Curve bestimmen; und wenn die vorhergehende Gleichung statt hat, so werden die Krümmungshalbmesser eine Evolute bilden. Denn setzt man zu dieser Gleichung, die Gleichung

$$1 + my' + nz' = 0$$

hinzu, die eine von denen aus Nr. 141 ist, so wird man diese haben:

$$1 + my' + nz' + m'(y - b) + n'(z - c) = 0,$$

welche nichts anders ist als die Erstegleichung der Gleichung der Ebene

$$x - a + m(y - b) + n(z - c) = 0,$$

indem man die Coordinaten a, b, c der Ebene als beständig, und die Größe x die hier als Parameter dient und von der die andern Größen y, z, m, n als Funktionen voraus gesetzt sind, als allein veränderlich ansieht; welches das Princip der Abwickelung fähigen Oberflächen ausmacht, wie man weiter unten (Nr. 159) sehen wird.

Uebrigens, giebt es eine allgemeinere Art die Evoluten der Curven zu behandeln, welche darin besteht den

Halbmesser der Evolute in einer geneigten Lage gegen die Berührungsebene zu nehmen, und welche zu vielen schönen Eigenschaften der Curven und der Oberflächen Veranlassung giebt. Da die Grenzen, welche wir uns vorgeschrieben haben nicht erlauben, uns so weit hierin einzulassen, so bleibt nur noch übrig unsere Leser zu ersuchen diese neue Theorie, in dem 10ten Bande der Memoiren der vormaligen Akademie der Wissenschaften nachzusehen.

144.

Wenn man die Projection einer Curve von doppelter Krümmung auf die Ebene der x und y zeichnet, so kann man diese Projectionscurve als die krummlinigte Axe der Curve von doppelter Krümmung ansehen; dergestalt, wenn man s den Bogen der Projectionscurve nennt, die Coordinaten x, y sind, und man voraussetzt daß dieser Bogen in grader Linie ausgedehnt sey, so wird man s und z für die rechtwinklichten Coordinaten der Curve von doppelter Krümmung als auf eine Ebene applicirt gedacht, haben.

Diese Betrachtung giebt uns das Mittel an die Hand, die Formeln von der Quadratur und von der Rectificirung der ebenen Curven (Nr. 134, 136) unmittelbar bey den Curven von doppelter Krümmung anzuwenden. Dieserwegen, darf man nur in den Ausdrücken

$$yx' \text{ und } \sqrt{(x'^2 + y'^2)}$$

s an die Stelle von x und z statt y setzen, so hat man

$$zs' \text{ und } \sqrt{(s'^2 + z'^2)},$$

und da der Bogen s durch die Gleichung

$$s' = \sqrt{(x'^2 + y'^2)}$$

bestimmt

kimmt ist; und macht man diese Substitution, so wird
an folgende zwey Formeln haben

$$z\sqrt{)x'^2 + y'^2)} \text{ und}$$

$$\sqrt{(x''^2 + y''^2 + z''^2)},$$

wovon die Erste, die Erstefunktion des Flächenraums ist, oder
an der Oberfläche des graden Cylinders der zur Grundflä-
e die Projection der Curve von doppelter Krümmung hat,
nd die durch den Umfang dieser Curve begrenzt ist, und
ovon die zweyte Funktion die Erstefunktion des Bogens
erselben Curve ist.

145.

Die krummen Oberflächen bestimmen sich auch durch
rey rechtwinklichte Coordinaten, wie die Linien von dop-
elter Krümmung, aber mit dem Unterschiede, daß für
ie Oberflächen, zwey der Coordinaten unabhängig unter-
h sind, und die Dritte ist eine Funktion dieser beyden;
daß eine Oberfläche nur durch eine einzige Gleichung
wischen den drey Coordinaten vorgestellt ist.

Die zwey Gleichungen die eine Curve von doppelter
krümmung bestimmten, stellen also jede ins besondere ei-
e krumme Oberfläche dar, und die durch das System
ieser zwey Gleichungen vorgestellten Curve, ist durch den
Durchschnitt beyder Oberflächen gebildet. Die Theorie der
Oberflächen hängt also von der Analysis der Funktionen
von zwey veränderlichen Größen ab, und kann wie die
Theorie der Curven und durch die nemlichen Princ pien
abgehandelt werden. So wie eine grade Linie Tangente
einer Curve seyn kann, eben so kann eine Ebene Tan-
gente einer Oberfläche seyn, und man wird die Berüh-
rungsebene durch die Bedingung bestimmen daß keine an-
dere Ebene durch den Berührungspunkt zwischen jener

Berührungsebene und der Oberfläche gezogen werd kann.

Es ſeyen x, y, z die drey Coordinaten der gegeben Oberfläche, und p, q, r die auf dieſelben rechtwinklicht Axen bezogenen Coordinaten der Berührungsebene; wird man durch die Natur der Oberfläche haben:

$$z = f(x, y),$$

und durch die Natur der Ebene

$$r = a + bp + cq;$$

wo a, b, c drey beſtändige Größen ſind, die die Lage d Ebene beſtimmen. Man ſieht ſogleich, um daß die Eb ne mit der Oberfläche einen Punkt gemein habe, ſo m ihre Gleichung beſtehen, wenn man annimmt daß d Coordinaten p, q, r zu x, y, z werden; welche folgen erſte Gleichung giebt:

$$z = a + bx + cy.$$

Wir wollen jetzt einen andern Punkt der Oberfläch betrachten, welcher den Coordinaten $x + i$, $y + o$ ent ſpricht, ſo wird die ſenkrechte Ordinate z gleich

$$f(x + i, y + o).$$

Wir wollen auch in der Gleichung der Ebene

$$p = x + i, \quad q = y + o$$

machen, ſo wird die ſenkrechte Ordinate r gleich

$$a + b(x + i) + c(y + o),$$

und die Entfernung zwiſchen den entſprechenden Punkte der Oberfläche und der Ebene wird ausgedrückt durch

$$f(x + i, y + o) - a - b(x + i) - c(y + o).$$

Die Funktion

$$f(x + i, y + o)$$

kann man in folgender Reihe entwickeln (Nr. 85)

$$f(x,y$$

$$f(x, y) + if'(x, y) + of_{,}(x, y) + \frac{i^2}{2} f''(x, y) +$$
$$i\,o\,f_{,}'(x, y) + o^2 f_{,,}(x, y) + \text{u. s. w.}$$

also wegen

$$f(x, y) = z = a + bx + cy,$$

wird die Entfernung wovon die Rede ist, und die wir mit D bezeichnen, folgendermaſſen ausgedrückt seyn:

$$D = i[f'(x, y) - b] + o[f_{,}(x, y) - c] +$$
$$\frac{i^2}{2} f''(x, y) + io f_{,}'(x, y) + \frac{o^2}{2} f_{,,}(x, y) + \text{etc.}$$

wo man sogleich sieht, daß, da die Größen i und o unbestimmt bleiben, der Werth von D der kleinste wird, wenn man die Größe b und c auf eine solche Art bestimmt, daß die durch i und o multiplicirten Glieder verschwinden, welches

$$b = f'(x, y) = z',$$
$$c = f_{,}(x, y) = z_{,}$$

(Nr. 90) geben wird; und da man schon

$$a + bx + cy = z$$

gefunden hat, so wird man die Werthe der drey beständigen Größen a, b, c von der Gleichung der Ebene in Funktionen von x, y, z haben. Diese Werthe werden daher seyn

$$a = z - xz' - yz_{,},$$
$$b = z',$$
$$c = z_{,};$$

und die Lage der Ebene wird gänzlich bestimmt seyn.

146.

Durch die Verschwindung der in i und o multiplicirten Glieder, wird bewirkt daß die Entfernung D weiter keine Glieder enthält als solche die in Potenzen oder in höhere

höhere Producte als die nemlichen Größen multiplicirt sind. Wenn man eine andere Ebene durch den nemlichen Punkt der zu den Coordinaten x und y gehört durchgehen liesse, so würde man durch die Entfernung die ich △ nennen werde zwischen den Punkten der Oberfläche und der neuen den Coordinaten x + i und y + o entsprechenden Ebene, ein jenen von D ähnlichen Ausdruck finden, wo aber die durch i und durch o multiplikirten Glieder sich nicht mehr vernichten. Nun ist aber leicht zu sehen, daß man die Größen i und o klein genug nehmen kann damit die durch die ersten Potenzen von i oder von o multiplicirten Glieder, größer werden als die andern in Potenzen oder Producte von mehreren Dimensionen multiplicirten Glieder, welches uns sogleich berechtigt zu schliessen daß man immer i und o hinlänglich kleine Werthe geben kann, damit daß die Entfernung △ die Entfernung von D übertrift, dergestalt daß es unmöglich sey daß die letzte Ebene zwischen der ersten und der der Oberfläche durchgeht.

Aber diese Schlußfolge, die ausser allen Zweifel wäre wenn die Ausdrücke von D und △ nur von einer bestimmten Anzahl von Glieder zusammen gesetzt wäre, könte wegen den unendlichen Reihen die in diesen Ausdrücken einschleichen, Schwierigkeiten leiden.

Um solche zu vermeiden haben wir, als wir die Tangenten der Curven betrachtet haben, von dem Lehrsatz in Nr. 53. Gebrauch gemacht vermittelst welchen man die Funktionen nur Theilweise, und soviel als man davon nöthig hat, entwickeln kann. Wir könnten diesen Lehrsatz noch auf die Entwickelung der Funktionen von zwey veränderlichen Größen anwenden, indem man successive die Folge der Potenzen von i und o gemäß entwickelte.

Da

Da man aber auf dieſe Art keine ſymetriſche Formeln haben würde, und jenen der Funktionen von einer veränderlichen Größe ähnlich, ſo werden wir hiervon Gelegenheit nehmen die Analyſis von den Nr. 45 u. ſ. w. zu verallgemeinern, indem wir ſolche auf die Entwickelung einer beliebigen Funktion $f(x, y)$ von zwey veränderlichen Größen ausdehnen.

147.

Laßt uns die in (Nr. 85) für die Entwickelung von

$$f(x + i, y + o)$$

gefundene allgemeine Formel wiederum vornehmen, und (welches, da x, y, i und o beliebige Größen ſind, erlaubt iſt) x nnd y in $x - i$ und $y - o$ verändern, nachher i und o in xz und yz, ſo werden wir haben;

$$\begin{aligned} f(x, y) = {} & f(x - xz, y - yz) + \\ & xzf'(x - xz, y - yz) + \\ & yzf_{,}(x - xz, y - yz) + \\ & \frac{x^2z^2}{2} f''(x - xz, y - yz) + \\ & xyz^2 f_{,}'(x - xz, y - yz) + \\ & \frac{y^2z^2}{2} f_{,,}(x - xz, y - yz) + \text{etc.} \end{aligned}$$

wo z eine beliebige unbeſtimmte Größe iſt, die wenn ſie gleich Null geſetzt wird, die Gleichung identiſch macht, wenn man ſie $= 1$ ſetzt, geben wird:

$$\begin{aligned} f(x, y) = {} & f. + xf.' + yf., + \frac{x^2}{2} f.'' + \\ & xyf.', + \frac{y^2}{2} f.,, + \text{etc.} \end{aligned}$$

Dieſes iſt die allgemeine Formel von der Entwickelung der Funktion $f(x, y)$, nach den Potenzen von x und

y, in welcher die durch f., f'., $f_{,}$ u. s. w. angezeigten Größen, die Werthe der abgeleiteten Funktionen nach x und y, indem man $x = o$ und $y = o$ macht, bezeichnen. Gesetzt man wollte jetzt diese Entwickelung nur Theilweise machen, und sogleich bey dem ersten Gliede innehalten, so macht man:

$$f(x, y) = f(x - xz, x - yz) + P,$$

wo P eine Funktion von Z ist, die augenscheinlich Null seyn sollte, wenn $z = o$. Da die Größe z beliebig ist, so können wir die Erstegleichung in Beziehung auf z nehmen, und durch die festgesetzten Principien und Bezeichnungen, ist es leicht zu sehen daß die Erstefunktion von

$$f(x - xz, y - yz)$$

in Beziehung auf z genommen, seyn wird

$$- xf'(x - xz, y - yz) - yf_{,}(x - xz, y - yz);$$

daher, wenn man durch P' die Erstefunkt von P, auch in Beziehung auf z genommen, anzeigt, so wird man für die Bestimmung von P die Gleichung von der ersten Ordnung haben

$$P' = xf'(x - xz, y - yz) + yf_{,}(x - xz, y - yz).$$

Laßt uns zweytens, die drey ersten Glieder der Entwickelnng von $f(x, y)$ betrachten, und machen

$$f(x, y) = f(x - xz, y - yz) + xzf'(x - xz, y - yz) + yzf_{,}(x - xz, y - yz) + Q,$$

Q wird eine Funktion von z seyn, die durch die Natur dieser Gleichung selbst, Null werden sollte, wenn $z = o$ ist. Wegen der Unbestimmtheit von z, könnte man die Erstegleichung in Beziehung auf z nehmen; und wenn man durch Q', die Erstenfunktionen von Q anzeigt, so wird man, nachdem man die Glieder welche sich in der

Ersten-

erstengleichung vernichten ausgelöscht hat, folgende Gleichung der ersten Ordnung für die Bestimmung von Q, finden:

$$Q' = x^2 z f'(x - xz, y - yz) + 2xyz f_{,}'(x - xz, y - yz) + y^2 z f_{,,}(x - xz, y - yz);$$

u. s. w.

Um von diesen Gleichungen die Werthe von P, Q, u. s. w. abzuleiten, so müste man die ursprünglichen Gleichungen der Größen P', Q', u. s. w. in Beziehung auf z suchen, und sie so nehmen daß sie Null seyen, wenn $z = o$ ist. Aber, da wir keine allgemeine Ausdrücke dieser Größen nöthig haben, sondern nur von ihren Werth in Beziehnng auf $z = 1$, daß selbst es hinlänglich ist Grenzen dieser Werthe zu haben, so könnte man von der Methode in Nr. 49 Gebrauch machen, um zu ähnlichen Conclusionen als jene in Nr. 51 sind zu gelangen.

Also, indem man durch λ eine unbestimmte Zahl anzeigt, oder vielmehr eine unbekannte, immer zwischen o und 1 enthalten, und die überall in der nemlichen Funktion dieselbe seyn sollte, aber die verschieden in den verschiedenen Funktionen seyn könnte, so wird man folgende Ausdrücke finden.

$$P = xf'(\lambda x, \lambda y) + yf_{,}(\lambda x, \lambda y),$$

$$Q = \tfrac{1}{2}[x^2 f''(\lambda x, \lambda y) + 2xyf_{,}'(\lambda x, \lambda y) + y^2 f_{,,}(\lambda x, \lambda y)]$$

und so auch von den andern.

Wenn man endlich diese Werthe von P, Q u. s. w. in den Entwickelungen von $f(x, y)$ setzt, und $z = 1$ macht, so wird man diese allgemeine Formeln haben, welche eine Erweiterung von dem Lehrsatze in no. 52. enthält.

$f(x, y)$

$$f(x, y) = f. + xf'(\lambda x, \lambda y) + yf_{,}(\lambda x, \lambda y);$$
$$= f. + xf.' + yf., + \frac{x^2}{2} f''(\lambda x, \lambda y);$$
$$+ xyf_{,}'(\lambda x, \lambda y) + \frac{y^2}{2} f_{,,}(\lambda x, \lambda y);$$
$$= f. + xf.' + yf., + \frac{x^2}{2} f.'' + xyf.', + \frac{y^2}{2} f_{,,};$$
$$+ \frac{x^3}{2.3} f'''(\lambda x, \lambda y) + \frac{x^2 y}{2} f_{,}''(\lambda x, \lambda y);$$
$$+ \frac{xy^2}{2} f_{,,}'(\lambda x, \lambda y) + \frac{y^3}{2.3} f_{,,,}(\lambda x, \lambda y);$$
$$= \text{u. ſ. w.}$$

Mithin, wenn man die Funktion

$$f(x + i, y + o)$$

nach den Potenzen von i und von o zu entwickeln hat, ſo darf man nur i und o an die Stelle von x und y ſetzen und die Größen $f. f.' f.,$ u. ſ. w. werden $f(x, y)$, $f'(x, y)$, $f_{,}(x, y)$, u. ſ. w. wo die abgeleiteten Funktionen in Beziehung auf x und y genommen werden können, weil die Funktion $f(x + i, y + o)$ ſo beſchaffen iſt, daß ihre abgeleiteten Funktionen in Beziehung auf x und y die nemlichen ſind, als die Abgeleiteten in Beziehung auf i und o. Man wird alſo haben:

$$f(x+i, y+o) = f(x, y) +$$
$$if'(x + \lambda i, y + \lambda o) +$$
$$of_{,}(x + \lambda i, y + \lambda o);$$
$$= f(x, y) + if'(x,y) + of_{,}(x,y) +$$
$$\frac{i^2}{2} f''(x + \lambda i, y + \lambda o) +$$
$$iof_{,}'(x + \lambda i, y + \lambda o) +$$
$$\frac{o^2}{2} f_{,,}(x + \lambda i, y + \lambda o);$$
$$= f(x,y)$$

$$= f(x, y) + if'(x, y) + of_{,}(x, y) +$$
$$\frac{i^2}{2} f''(x, y) + io f_{,}'(x, y) + \frac{o^2}{2} f_{,,}(x, y) +$$
$$\frac{i^3}{2.3} f'''(x, + \lambda i, y + \lambda o) +$$
$$\frac{i^2 o}{2} f_{,}''(x + \lambda i, y + \lambda o) +$$
$$\frac{io^2}{2} f_{,,}'(x + \lambda i, y + \lambda o) +$$
$$\frac{o^3}{2.3} f_{,,,}(x + \lambda i, y + \lambda o);$$
= und ſo weiter.

Die Größe λi entſpricht, wie man ſieht, der von ıs durch j bezeichneten Größe in den zu Anfange dieſes ›epten Theils angewandten Formeln. Wir geben den usdruck λi den Vorzug, weil der nemliche Conficient λ h in der Größe λo findet. Aus dieſen Formeln, welche gt ſehr leicht auf Funktionen von drey oder einer grö›rn Anzahl von veränderlichen Größen ausgedehnt wer›n könnten, kann man folgende Schlußfolge ableiten:

Wenn man, in der Entwickelung einer Funktion nach en Potenzen oder Producten von gewiſſen Größen, bey en Gliedern einer gegebenen Ordnung innehalten will, . h. in welchen dieſe Größen Dimenſionen von einem ›rade gleich dem Exponenten von dieſer Ordnung bilden, › kann man den Reſt der Entwickelung gleich den Glie›rn der folgenden Ordnung allein annehmen, aber in›em man darin dieſe nemlichen Größen unter den Funk›onen beybehält, und ſie alle mit einem Coefficienten λ ıultiplicirt deſſen Werth zwiſchen den Gränzen o und 1 nhalten iſt, und der derſelbe Werth in der nemlichen

Funktion seyn wird, der aber verschieden in den verschiedenen Funktionen seyn kann.

148.

Wir können jetzt den Resultaten der Analysis von Nr. 145 alle erwünschte Strenge geben; Zu diesem Ende darf man nur die Funktion $f(x+i, y+o)$ entwickeln und wenn man bey den Gliedern der ersten Ordnung inne hält, so wird man haben (Nr. 147)

$$f(x+i, y+o) = f(x, y) + if'(x, y) + of_{,}(x, y) + \frac{i^2}{2} f''(x + \lambda i, y + \lambda o) + io f_{,}'(x + \lambda i, y + \lambda o) + \frac{o^2}{2} f_{,,}(x + \lambda i, y + \lambda o),$$

und der Werth von der Entfernung D reducirt sich auf

$$D = \frac{i^2}{2} f_{,,}(x + \lambda i, y + \lambda o) + io f_{,}'(x + \lambda i, y + \lambda o) + \frac{o^2}{2} f_{,,}(x + \lambda i, y + \lambda o).$$

Für jede andere durch die Gleichung

$$r = \alpha + \beta p + \gamma q$$

vorgestellte Ebene, und wenn sie den nemlichen Punkt mit der andern Ebene und der Oberfläche gemein hat, so wird diese Entfernung, welche ich Δ nennen werde, ausser den vorhergehenden Gliedern, noch diese von der ersten Ordnung enthalten,

$$i[f'(x, y) - \beta] + o[f_{,}(x, y) - \gamma];$$

Hieraus ist leicht zu schliessen daß man i und o immer klein genug nehmen könnte damit diese Entfernung Δ die Entfernung D übertrifft.

Es

Es wird also unmöglich seyn daß diese letzte Ebene wischen der Oberfläche und der durch die Gleichung

$$r = a + bp + cq$$

vorgestellten Ebene durchgehen könnte; daher wird diese eine Tangente der gegebenen Oberfläche seyn, wenn man die in Nr. 145 macht

$$a = z - xz' - yz_{,},$$
$$b = z',$$
$$c = z_{,}.$$

Woraus man sieht daß die Lage der Berührungsebene von den zwey Erstenfunktionen z', $z_{,}$ abhängt.

Es ist in der That nach der Gleichung

$$r = a + bp + cq$$

leicht zu finden, daß wenn man α die Neigung des durch diese Gleichung auf die Ebene der Coordinaten p und q vorgestellten Ebene nennt, und β die Neigung der Durchschnittslinie dieser beyden Ebenen mit der Abscissenaxe p, so wird man haben

$$b = \sin.\ \beta\ \mathrm{tg}.\ \alpha,$$
$$c = \cos.\ \beta\ \mathrm{tg}.\ \alpha,$$

woraus man zieht

$$\mathrm{tg}.\ \alpha = \sqrt{(b^2 + c^2)}$$

$$\text{und } \mathrm{tg}.\ \beta = \frac{b}{c}.$$

Weil demnach die Axen der Coordinaten x, y, z die nemlichen sind als die der Coordinaten p, q, r, so werden die Winkel α und β in Beziehung der Berührungsebene, ebenfalls durch diese Formeln bestimmt seyn:

$$\mathrm{tg}.\ \alpha = \sqrt{(z'^2 + z_{,}^2)}$$

$$\text{und } \mathrm{tg}.\ \beta = \frac{z'}{z_{,}}.$$

149.

Allgemein, wenn $z = f(x, y)$ die Gleichung der vorgegebenen Oberfläche ist, und $r = F(p, q)$ die Gleichung einer gegebenen Oberfläche, und man will daß diese beyden Oberflächen einen Punkt gemein haben der den Coordinaten x, y, z entspricht, so müste die Gleichung $r = F(p, q)$ auch statt haben, wenn man $p = x$, $q = y$, $r = z$ machte, welche $z = F(x, y)$ geben würde. Wenn man ferner die Punkte der zwey Oberflächen die den nemlichen Coordinaten $x + i$ und $y + o$ entsprechen betrachtet, und man D die Entfernung zwischen den einem und dem andern nennt, d. h. der Theil von der senkrechten Ordinate welcher sich zwischen den beyden Oberflächen befindet, so ist sichtbar daß man haben wird

$$D = f(x + i, y + o) - F(x + i, y + o).$$

Laßt uns jetzt diese zwey Funktionen durch die Formeln von Nr. 147 entwickeln, indem wir sogleich bey den Gliedern der ersten Ordnung stehen bleiben, so werden wir, wenn man z, z' und z, an die Stelle von

$$f(x, y),\ f'(x', y),\ f'(x, y),$$

setzen, haben

$$\begin{aligned} D = {} & i[z' - F'(x, y)] + \\ & o[z, - F,(x, y)] + \\ & \frac{i^2}{2}[f'(x + \lambda i,\ y + \lambda o) \\ & - F'(x + \lambda i, y + \lambda o)] + \\ & io[f,'(x + \lambda i, y + \lambda o) \\ & - F,'(x + \lambda i,\ y + \lambda o)] + \\ & \frac{o^2}{2}[f_{,,}(x + \lambda i, y + \lambda o) \\ & - F_{,,}(x + \lambda i, y + \lambda o). \end{aligned}$$

Es

Geſetzt daß die durch i und durch o multiplicirten Glieder verſchwänden, welches ſtatt findet, wenn man

$$z' = F'(x, y)$$

und $z_, = F_,(x, y)$

nnimmt, ſo wird der Ausdruck von D nur noch Glieder on einer höhern Ordnung enthalten; und es iſt leicht arzuthun, daß man immer i und o klein genug nehm n ann damit dieſer Werth von D kleiner wird, als er Werth einer gleichen (pareille) Größe für eine an- ere gegebene Oberfläche, in welcher die durch i und urch o multiplicirten Glieder ſich nicht vernichten. Wenn lſo die Gleichung $r = F(p, q)$ der gegebenen Ober- äche drey willkührliche beſtändige Größen a, b, c enthält, und man ſie ſo beſtimmt daß ſie den drey Glei- ungen

$z = F(x, y)$, $z' = F'(x, y)$, $z_, = F'(x y)$

enügen, ſo wird es unmöglich ſeyn, daß irgend eine ndere Oberfläche, welche nicht den nemlichen Bedingun- en genug thut, zwiſchen der nemlichen Oberfläche und er vorgegebenen Oberfläche, deren Coordinaten x, y, z ind durchgehet.

Es iſt ſichtbar daß die drey vorhergehenden Gleichun- en nichts anders als die Gleichung der gegebenen Ober- äche ſelbſt ſind, wenn man darin die Coordinaten p, , r in x, y, z, und die zwey Erſtengleichungen von dieſer ach x und nach y genommen, verändert. Woraus man llgemein folgern kann, daß, wenn $F(p, q, r) = o$ die leichung der gegebenen Oberfläche iſt, ſo werden die rey Gleichungen von welchen die Rede iſt, indem man als Funktion von x und y anſieht in dieſe hier $F(x,$ $, z) = o$, $F'(x, y, z) = o$ und $F_,(x, y, z)$ einge- ſchloſſen ſeyn; dergeſtalt, daß, wenn man bloß durch

$F_{,}(x)$, $F'(y)$, $F'(z)$ die Erſtenfunktionen von $F(x, y, z)$ in Beziehung auf x, y, z allein genommen anzeigt, die zwey letzten Gleichungen werden (Nr. 91)

$$F(x) + z'F'(z) = 0,$$
$$F'(x) + z_{,}F'(z) = 0.$$

150.

Laßt uns den allgemeinen Ausdruck von der Entfernung D wiederum vornehmen, und die zwey Funktionen welche ſie enthält entwickeln, indem man die Entwickelung bis zu den zweyten Dimenſionen von i und o treibt; wenn man annimmt daß die drey obigen Gleichungen ſchon ſtatt haben, ſo hat man bloß

$$D = \frac{i^2}{2}[z'' - F''(x, y)] +$$
$$io[z_{,}' - F_{,}'(x, y)] +$$
$$\frac{o^2}{2}[z_{,,} - F_{,,}(x,y)] +$$
$$\frac{i^3}{2.3}A''' + \frac{i^2o}{2}A_{,}'' + \frac{io^2}{2}A_{,,}' + \frac{o^3}{2.3}A_{,,,},$$

indem man, um abzukürzen macht:

$$A''' = f'''(x + \lambda i, y + \lambda o) - F'''(x + \lambda i, y + \lambda o)$$
$$A_{,}'' = f_{,}''(x + \lambda i, y + \lambda o) - F_{,}''(x + \lambda i, y + \lambda o)$$

u. ſ. w.

Daher, wenn die Gleichung $z = F(p, q)$ der gegebenen Oberfläche ſo beſchaffen iſt daß man noch den drey Gleichungen

$$z'' = F''(x, y),\ z_{,}' = F_{,}''(x, y),\ z_{,,} = F_{,,}(x, y)$$

gnüge leiſten könnte, ſo werden die Glieder der zweyten Ordnung auch in dem Ausdrucke von D verſchwinden, und man

man wird leicht darthun daß es allezeit möglich sey die Größen i und o klein genug zu nehmen damit die Entfernung D kleiner sey als die Entfernung △ für jede andere gegebene Oberfläche welche nicht denselben Bedingungen gnüge thut; hieraus folgt daß unmöglich diese Oberfläche zwischen der gegebenen Oberfläche deren Gleichung $r = F(p, q)$ ist, und der vorgegebenen Oberfläche deren Gleichung $z = f(x, y)$ ist, durchgehen kann; und so weiter.

Wenn man allgemein durch $F(p, q, r) = o$ die Gleichung von der gegebenen Oberfläche vorstellt, so ist sichtbar daß die drey letzten Gleichungen in diese

$$F''(x, y, z) = o,$$
$$F_{i}'(x, y, z) = o$$
und $$F_{ii}(x, y, z) = o,$$

enthalten sind, indem man z als Funktion von x und y ansieht; und eben so von den andern.

Man könnte also die Theorie der Berührungen von verschiedenen Ordnungen welche wir in Beziehung auf krumme Linien vorgetragen haben, auf die Oberflächen ausdehnen, und daraus ähnliche Resultate ziehen.

So wird man, für die Berührung der ersten Ordnung, die Gleichung $F(x, y, z) = o$ mit ihren zwey Erstengleichungen nach x und y haben; Für die Berührung der zweyten Ordnung, wird man, ausser den drey vorhergehenden Gleichungen, die drey Zweytegleichungen von $F(x, y, z) = o$ nach x, nach y und nach x und y haben; u. s. w.

151.

Wir wollen für die gegebene Oberfläche, die Kugel nehmen deren allgemeine Gleichung

$$(p - a)^2 + (q - b)^2 + (r - c)^2 = d^2$$

ist, wo p, q, r die drey Coordinaten eines beliebigen Punkts ihrer Oberfläche sind, a, b, c die drey Coordinaten die die Lage des Mittelpunkts bestimmen, und d der Halbmesser.

Wenn man in dieser Gleichung p, q, r in x, y, z verändert, und nachher die zwey Erstegleichungen nach x und y nimmt, so wird man folgende drey Gleichungen haben:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - d^2 = 0,$$
$$x - a + z'(z - c) = 0,$$
$$y - b + z_{,}(z - c) = 0,$$

durch welche man sogleich die drey beständigen Größen a, b, c bestimmen könnte; man wird also finden

$$a = x + \frac{dz'}{\sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)}},$$

$$b = y + \frac{dz_{,}}{\sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)}},$$

$$c = z - \frac{d}{\sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)}},$$

und der Halbmesser d, wird noch willkührlich seyn.

Die durch diese Elemente bestimmte Kugel wird also Tangente von der Oberfläche seyn, und folglich ihr Halbmesser senkrecht auf der nemlichen Oberfläche. Sieht man also, den Werth von diesem Halbmesser als unbestimmt an, so werden die drey Größen a, b, c die Coordinaten der auf der Oberfläche senkrechten Linie seyn, wo d veränderlich, und x, y, z beständig sind.

152.

Damit die Kugel Krümmungsmesser (oseulatrice) der Oberfläche werde, so wird man noch drey andere Gleichungen,

gen haben, welche die Zweytegleichungen von der obigen ersten Gleichung seyn werden; aber, da nur noch eine willkührliche Größe d bleibt, so ist klar daß man nicht allen diesen Gleichungen ein gnüge leisten könnte; woraus folgt, daß es unmöglich ist im allgemeinen eine Krümmungskugel einer Oberfläche zu finden, wie man den Krümmungskreis einer Curve findet.

Wenn man statt einer Kugel, die aus der Umdrehung eines Kreisbogens um seiner Sehne entstandene Oberfläche anwenden wollte, so könnte man alsdann, da man in der Gleichung dieser Oberfläche sechs willkührliche Größen hat, diese Elemente auf die Art bestimmen daß die Berührung der zweyten Ordnung allgemein mit einer beliebigen Curve statt fände. Eben so würde es mit jeder andern Oberfläche seyn, deren Gleichung zum wenigsten sechs willkührliche beständige Größen enthielte.

153.

Wenn aber unter allen den Berührungskugeln nicht eine einzige seyn kann, die im eigentlichsten Sinne Krümmungsmesser von der Oberfläche würde, so kann man demohngeachtet diejenige bestimmen, welche Krümmungsmesser von seiner beliebigen auf der nemlichen Oberfläche gezeichneten Curve seyn wird. Hiezu darf man nur y als Funktion von x annehmen, wie in den Curven von doppelter Krümmung, und in dieser Hypothese, die Ersten und Zweytengleichungen von der Gleichung der Kugel

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - d^2 = 0$$

nehmen.

Die Erstegleichung wird seyn:

$$x - a + y'(y - b) + (z' + y'z')(z - c) = 0,$$

indem man z immer als Funktion von x und y ansieht,

deren zwey Erstefunktionen z' und $z_,$ sind, und nachher y als Funktion von x, wovon y' die Erstefunktion ist. Man wird auf die nemliche Art diese zweyte Gleichung

$$1 + y'^2 + y''(y - b) + (z' + y'z_,) + (z'' + 2y'z'_, + y'^2z_{,,} + y''z_,)(z - c) = 0$$

finden.

Der Erstengleichung ist schon durch die zwey Erstegleichungen von Nr. 151

$$x - a + z'(z - c) = 0,$$
$$y - b + z_,(z - c) = 0,$$

genüge geschehen. Es bleibt also nur noch übrig die vorhergehende Gleichung zu befriedigen, welche wegen

$$y - b + z_,(z - c) = 0,$$

sich auf diese hier

$$1 + y'z + (z' + y'z_,)^2 + (z'' + 2y'z'_, + y'^2z_{,,})(z - c) = 0$$

reducirt.

Wenn man also in dieser Gleichung den oben (die angezeigte Nummer) gefundenen Werth von c setzt, so könnte man daraus den Werth von d ziehen, und man wird daraus haben

$$d = \frac{[1 + y'^2 + (z' + y'z_,)^2]\sqrt{(1 + z'^2 + z_,^2)}}{z'' + 2y'z'_, + y'^2z_{,,}}.$$

Kennt man solchergestalt den Halbmesser der Krümmungskugel, so wird man durch die Formeln derselben Nummer, die Werthe der Coordinaten a, b, c, vom Mittelpunkte haben.

154.

Die Größe y' welche sich in den vorhergehenden Ausdrücken einschleicht, hängt von der Curve ab die die Projection von dieser ist, welche man auf die Oberfläche gezeich-

zeichnet annimmt. Da diese Curve willkührlich ist, so kann man diejenige suchen in welcher der Halbmesser d der Krümmung ein Maximum oder ein Minimum seyn würde; und dieserwegen, darf man nur die Erstefunktion des Ausdrucks von d, Null gleich setzen indem man sie als Funktion von y' ansieht (Nr. 133). Um aber den Calcul zu vereinfachen, wollen wir bemerken daß, da

$$d = (z - c)\sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)}$$

ist, das Maximum oder das Minimum von d in Beziehung auf y', dem Maximum oder Minimum von c entspricht; es darf also nur die Erstegleichung von der obigen Gleichung zwischen c und y' genommen werden, indem man die Erstefunktion von c Null annimmt, d. h. indem man bloß y' als veränderlich ansieht. Auf diese Art wird man die Gleichung

$$y' + z_{,}(z' + y'z_{,}) + (z'_{,} + y'z_{,,})(z - c) = 0$$

haben, die, wenn sie mit der nemlichen Gleichung combinirt wird, y' und c zu bestimmen dient.

Wenn man diese Gleichung durch y' multiplicirt und von der in Rede stehenden Gleichung abzieht, so wird man folgende weit einfachere

$$1 + z'^2 + y' z' z_{,} + (z'_{,} + y' z'_{,})(z - c) = 0$$

haben, welche man mit der Vorhergehenden combiniren wird.

Durch die Eliminirung von $z - c$ wird man eine Gleichung in y' von dieser Form

$$Ay'^2 - By' - C = 0$$

haben, wo um abzukürzen,

$$A = (1 + z_{,}^2)z'_{,} - z' z_{,} z_{,,}$$
$$B = (1 + z'^2)z_{,,} - (1 + z_{,}^2)z''_{,,}$$
$$C = (1 + z'^2)z'_{,} - z' z_{,} z''_{,};$$

ist

ist, Auflösung von dieser Gleichung wird

$$y' = \frac{B \pm \sqrt{(B^2 + 4AC)}}{2A},$$

geben, welches eine Gleichung der ersten Ordnung in x, y un ist, weil z durch die Natur der Oberfläche ei ne g ne Funktion von x und y ist, so werden die Grö A, B, C auch gegebene Funktionen von x und y seyn. De ursprüngliche Gleichung in x und y wird also eine willkührliche beständige Größe enthalten, und eine unendliche Menge von Curven vorstellen, welche die Projectionen der Linie von der größten und von der kleinsten Krümmung der vorgegebenen Oberfläche seyn werden.

Wenn man die obigen zwey Gleichungen so mit einander kombinirt daß die Glieder wo y' und $z - o$ sich zusammen befinden verschwinden, so zieht man daraus

$$z - c = \frac{(1 + z'^2)z_{,} - z' z_{,} z', - Ay'}{z'_{,}{}^2 - z'' z_{,}{}^2}.$$

Wenn man also den Werth von y' substituirt, und überdem noch

$$E < (1 + z'^2)z_{,,} + (1 + z_{,}{}^2)z'' + z' z_{,} z'_{,}$$

macht, so wird man haben

$$z - c = \frac{E \pm \sqrt{(B^2 + 4AC)}}{2(z'' z_{,,} - z'_{,}{}^2)},$$

und daraus

$$d = \frac{[E \pm \sqrt{(B^2 + 4AC)}]\sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}{}^2)}}{2(z'' z_{,,} - z'_{,}{}^2)}$$

woraus man sieht, daß die beyden Wurzelwerthe, die eine das Maximum, und die andere das Minimum des Halbmessers d giebt.

Es giebt also zu jedem Punkte der Oberfläche, zwey Zweige, die sich schneiden, und wovon der eine, einer Linie der größten, und der andere einer Linie der kleinsten

krümmung entspricht; und der Winkel unter welchem
h schneiden, hängt von den doppelten Werth der
e y′ ab, die gleich der Tangente des Winkels ist,
er durch die Tangente der Projectionscurve auf die
: der x und y mit der fixen Axe der x gebildet

Da nun die Lage dieser Ebene willkührlich ist, so
man sie so nehmen, daß sie sich mit der Berüh-
ebene der Oberfläche gänzlich deckt, alsdann wird die
ctionscurve mit der Curve selbst zusammenfallen, und
ey Werthe von y′ werden die Tangenten der Winkel
: die Tangenten der beyden Zweige der größten und
leinsten Krümmung mit einer und derselben Linie ma-

Folglich ist der gesuchte Winkel unter welchen
d iese Zweige schneiden, die Differenz dieser Win-
Also, wenn man α und β die zwey Werthe von y′
, so wird die Tangente dieses Winkels, durch die
nten Formeln seyn

$$\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta} = \frac{\sqrt{(B^2 + 4AC)}}{A - C}$$

: aber leicht durch die Formeln von Nr. 148 zu se-
daß um daß die Berührungsebene einer Oberfläche
er Ebene der x und y sich gänzlich decke, so müssen
Werthe von z′ und z, Nullen seyn. Macht man al-
den Ausdrücken von A, B, C, z′ = o, z, = o, so
man haben

$$A = z', \quad B = z, - z'', \quad C = z',$$

s A — C = o giebt. Also, die Tangente des Win-
vovon die Rede ist wird unendlich seyn, und folg-
er Winkel ein Rechter. Woraus man allgemein
en muß, daß die Linien der größten und kleinsten
mung einer beliebigen Oberfläche sich immer unter
rechtem Winkel schneiden.

155.

155.

Die Eigenschaft des Maximum und des Minimum ist nicht die einzige welche diese Linien caracterisiren, sie sind noch in Ansehung ihrer Evoluten ausgezeichnet. In der That, wenn man die nöthigen Bedingungen sucht, damit der Krümmungshalbmesser überall Tangente der Mittelpunktscurve sey, so wird man durch ähnliche Betrachtungen als in Nr. 142, wenn man sie bey den Ausdrücken der Coordinaten a, b, c dieser Curve (Nr. 151) anwendet, finden, daß diese Bedingungen sich soweit reduciren als die Werthe der Erstenfunktionen a′, b′, c′ die nemlichen sind, es sey daß die Größe d allein veränderlich ist, oder daß die Größen x, y, z zugleicher Zeit wie d variiren

Also, wenn man die Erstengleichungen der drey Gleichungen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = d^2,$$
$$x - a + z'(z - c) = o,$$
$$y - b + z,(z - c) = o,$$

aus Nr. 151 nimmt, wovon die Werthe a, b, c abhängen, so müßte derjenige Theil welcher der einzigen Variirung von x, y, z angehört Null seyn. Es ist aber sichtbar daß die zweyte und dritte Gleichung diesen Theil in der Erstengleichung der ersten Gleichung zu Null macht; es wird also gnügen die ersten Gleichungen der Gleichungen

$$x - a + z'(z - c) = o,$$
$$y - b + z,(z - c) = o$$

zu nehmen, indem man b und c als beständig ansieht. Diese Gleichungen werden also, indem man wie oben

(Nr.

Nr. 153) y als Funktion von x und z als Funktion von x und y anſieht, ſeyn

$$+ z'^2 + y' z' z, + (z'' + y' z',) (z - c) = o,$$
$$' + z, z' + y' z,^2 + (z', + y' z',) (z - c) = o;$$

und wenn man ſie mit den beyden Gleichungen aus Nr. 154, die das Maximum und das Minimum von d beſtimmen, vergleicht, ſo ſieht man daß ſie identiſch die nemlichen ſind. Hieraus folgt daß die Linien nach welchen der Krümmungshalbmeſſer Tangente der Mittelpunktscurve ſeyn wird, die nemlichen ſind, als die von der größten und kleinſten Krümmung.

Aber die Ausdrücke von a, b, c aus Nr. 151 geben, indem man nur d variiren läßt:

$$a' = \frac{d' z'}{\sqrt{(1 + z'^2 + z,^2)}},$$

$$b' = \frac{d' z,}{\sqrt{(1 + z'^2 + z,^2)}},$$

$$c' = \frac{d'}{\sqrt{(1 + z'^2 + z,^2)}};$$

woraus man zieht

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = d^2,$$

und folglich

$$d' = \sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2)};$$

Hieraus wird man ſchlieſſen (Nr. 144) daß die Größe d den Bogen der Curve von welchem a, b, c die Coordinaten ſind, gleich ſeyn wird.

Dieſe Curve wird alſo die wahre Evolute der Linie von der größten und kleinſten Krümmung ſeyn, und umgekehrt können nur dieſe Linien auf einer beliebigen Oberfläche eine Evolute durch die Krümmungshalbmeſſer bilden.

Dieſe Eigenſchaften der Oberflächen ſind ſehr merckwürdig, und verdienen die ganze Aufmerkſamkeit der

Geo-

Geometer; sie geben überdem Gelegenheit zu wichtigen Anwendungen für die Künste. Man sehe die durch Monge der Akademie der Wissenschaften überreichten Memoiren: über die Anwendung der Analysis auf die Erzeugung der krummen Oberflächen.

156.

Man kann über die verschiedenen Berührungen der Oberflächen analoge Probleme wie die welche uns bisher in Beziehung auf Curven (Nr. 122 u. f.) beschäftiget haben vorgeben, und sie durch ähnliche Principien auflösen. Wir begnügen uns hier die Berührungen der ersten Ordnung zu betrachten.

Den Formeln von Nr. 150 zufolge, wenn die Gleichung

$$F(p, q, r) = 0,$$

der gegebenen Oberfläche, drey willkührliche beständige Größen a, b, c enthält, damit diese Oberfläche eine Berührung der ersten Ordnung mit einer beliebigen Oberfläche, welche auf die Coordinaten x, y, z bezogen ist habe, so muß man a, b, c in x, y, z durch die drey Gleichungen

$$F(x, y, z) = 0,$$
$$F'(x, y, z) = 0,$$
$$F_{,}(x, y, z) = 0,$$

bestimmen, wovon die zwey letzten sich auf die Form

$$F'(x) + z' F'(z) = 0,$$
$$\text{und } F'(y) + z, F'(z) = 0$$

reduciren.

Wenn also die Frage ist, diejenige Oberfläche zu finden für welche die drey Elemente a, b, c, der Berührung unter sich eine bestimmte Beziehung hätten, so müßte man in die Gleichung welche diese Beziehung ausdrückt, die

Wer-

Werthe von a, b, c, ſubſtituiren, und wenn dieſe Gleichung zwiſchen den Größen a, b, c und x, y, z iſt, ſo wird man eine Gleichung der erſten Ordnung in x, y, z, x' und z', haben, welche man durch die allgemeine Methode von Nr. 104 behandeln könnte.

Wenn aber die Gleichung von welcher die Rede iſt nur zwiſchen den drey Größen a, b, c wäre, ſo würde die Auflöſung des Problems weit einfacher ſeyn. In der That, es iſt klar daß man alsdann annehmen kann die Größen a, b, c ſeyn beſtändig; und in dieſem Falle wird die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

die urſprüngliche Gleichung von der Gleichung der erſten Ordnung, welche durch die Bedingungen des Problems gegeben iſt, indem man für eine der drey beſtändigen Größen a, b, c ihren aus der gegebenen Gleichung gezogenen Werth ſetzt. Man wird alſo eine urſprüngliche Gleichung haben, welche nur particulär wäre. Da ſie aber zwey willkührliche beſtändige Größen enthält, ſo könnte man, durch die Methode von Nr. 95, die allgemeine Gleichung finden welche die vollſtändige Auflöſung des Problems geben wird.

Dieſer Methode zu folge, macht man alſo $b = \phi a$, wenn a und b die zwey willkührliche beſtändige Größen ſind; man eliminirt a vermittelſt der Gleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

und durch ihre Erſtegleichung, in Beziehung auf die einzige Größe a genommen, eine Gleichung welche durch

$$F'(a) + \phi' a . F'(b) = 0$$

vorgeſtellt iſt, indem man durch $F'(a)$ und $F'(b)$ die Erſtenfunktionen von

$$F(x, y, z)$$

in Beziehung der isolirten veränderlichen Größen a und b bezeichnet.

157.

Um zu sehen wie das System von diesen zwey Gleichungen dem Problem genügt, so wird man sogleich beobachten daß die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0,$$

die gegebene Curve vorstellt mit welcher die vorgegebene eine Berührung der ersten Ordnung haben soll. Diese Gleichung löst also das Problem, welches auch immer die willkührlichen beständigen Größen a und b seyn mögen. Da aber die durch das Problem verlangte Berührung, nur erfordert daß die Werthe von z und von ihren zwey Erstenfunktionen z′ und z, die nemlichen für die zwey Curven seyn, so folgt daraus daß sie ebenfalls statt hat, wenn man a und b veränderlich annimmt, wenn nur diese Erstenfunktionen noch die nemlichen seyen. Dieses ist nun dasjenige welches genau aus den Systeme der beyde in Rede stehenden Gleichungen hervorgeht, wie man sich davon durch Nr. 95 überzeugen kann.

Wir bemerken ferner daß die durch das System dieser Gleichungen vorgestellte Oberfläche, nichts anders seyn wird als die Oberfläche welche durch die continuirliche Durchschneidung der durch die nemliche Gleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

vorgestellten Oberflächen, wenn man darin den Parameter a variiren läßt, gebildet wird; dergestalt daß diese Oberfläche alle diese verschiedene particulaire Oberflächen zugleich berührt oder enveloppirt.

In der That, wenn man, welches erlaubt ist die enveloppirende Oberfläche, durch die Gleichung

F(x

$$F(x, y, z) = 0$$

vorſtellt, in welcher a eine beliebige veränderliche Größe ſey, und man dieſe Größe zu beſtimmen ſuche, dergeſtalt daß die nemliche Oberfläche ſucceſſiv alle gegebene Oberflächen berührt, ſo müßte man der Gleichung

$$F'(a) + \phi' a \,.\, F'(b) = 0$$

genüge leiſten damit die Werthe von z' und z, dieſelben ſeyen, als die der enveloppirenden Oberflächen. Dieſes entſpricht demjenigen was man oben (Nr. 126) in Beziehung auf krumme Linien gefunden hat.

158.

Weil die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

die drey willkührlichen Größen a, b, c enthält, welche durch die Combination dieſer Gleichung mit ihren zwey Erſtengleichungen in Beziehung auf x und y genommen indem man a, b, c als beſtändige Größen anſieht (Nr. 156); Wenn man jetzt dieſe Größen als Funktionen von x und y anſieht, ſo iſt klar daß man auch die zwey Erſtengleichungen von der nemlichen Gleichung in Beziehung dieſer Größen ſeparat haben wird. Alſo, wenn man durch

$$F'(a),\ F'(b),\ F'(c)$$

die Erſtenfunktionen von der Funktion $F(x, y, z)$ in Beziehung der einzigen Größen a, b, c ſeparirt betrachtet, anzeigt, ſo wird man noch folgende zwey Erſtegleichungen haben

$$a' F'(a) + b' F'(b) + c' F'(c) = 0,$$
$$a, F'(a) + b, F'(b) + c, F'(c) = 0.$$

Es ſey $c = f(a, b)$ die Gleichung welche die gegebene Beziehung zwiſchen den Größen a, b, c, ausdrückt,

wenn man ebenfalls die zwey Erſtegleichungen nimmt, ſo hat man

$$c' = a' f'(a) + b' f'(b),$$
$$c, = a, f'(a) + b, f'(b),$$

wo $f'(a)$ und $f'(b)$ die zwey Erſtefunktionen von $f(a,b)$ in Beziehung auf a und b iſolirt ſind. Subſtituirt man dieſe Werthe von c' und c, in die zwey vorhergehenden Gleichungen, ſo wird man haben

$$a'[F'(a) + f'(a).\ F'(c)] +$$
$$b'[F'(b) + f'(b).\ F'(c)] = o$$
$$a,[F'(a) + f'(a).\ F'(c)] +$$
$$b,[F'(b) + f'(b).\ F'(c)] = o,$$

woraus man dieſe Gleichung

$$a' b, - b' a, = o$$

zieht, wo die durch die Caracteriſtik f angezeigte Funktion nicht mehr hineinkommt.

Wenn man alſo in dieſer Gleichung

$$a' b, - b' a, = o$$

die Werthe von a, b in x, y, z, z' und z, ſubſtituirt, ſo wird man eine Gleichung der zweyten Ordnung haben, von welcher die urſprüngliche Gleichung der erſten Ordnung ſeyn wird $c = f(a, b)$, wo die durch f angezeigte Funktion willkührlich iſt; und die urſprüngliche Gleichung von dieſer hier zwiſchen x, y, z, wird das Syſtem der Gleichung

$$F(x, y, z) = o$$

ſeyn, und von ihrer erſten Gleichung in Beziehung auf a genommen, nachdem man darin $f(a, b)$ für c, und φa für b geſetzt hat, wo φa die zweyte willkührliche Funktion iſt.

Man könnte alſo auf dieſe Art, die urſprüngliche Gleichung einer jeden Gleichung der zweyten Ordnung

finden, wenn sie sich auf die Form

$$a' b, - b' a, = o$$

bringen läßt, wo die Größen a, b von einer beliebigen Gleichung

$$F(x, y, z, a, b, c) = o$$

zwischen den Größen x, y, z, a, b, c, und von ihre zwey Erstengleichungen in der Hypotheſe von a, b, c als beſtändige Größen genommen, abgeleitet ſind; welches eine für die Fortſchritte der umgekehrten Analyſis der Funktionen von zwey veränderlichen Größen wichtige Methode an die Hand giebt.

159.

Wir wollen die vorhergehende Theorie auf die Berührungsebenen anwenden. Wir haben weiter oben gefunden, daß die Elemente a, b, c der Berührung einer durch die Gleichung

$$r = a + bp + cq$$

vorgeſtellten Ebene alſo ausgedrückt ſind;

$$a = z - xz' - yz_{,},$$
$$b = z', \quad c = z_{,}.$$

Hat man alſo eine beliebige Gleichung zwiſchen dieſen drey Größen welche z. B.

$$o = f(a, b)$$

giebt, ſo wird die urſprüngliche Gleichung dieſer Gleichung erſten Ordnung durch das Syſtem von dieſen zwey Gleichungen

$$z = a + x\,\varphi a + y\,f(a, \varphi a),$$
$$1 + x\,\varphi' a + y\,f(a)' = o$$

vorgeſtellt werden, wenn man durch $\varphi' a$ und $f(a)'$ die Beſtenfunktionen von φa und von $f(a, \varphi a)$ in Beziehung auf a bezeichnet. Die Größe a ſollte eliminirt werden;

um

um eine Gleichung in x, y, z, zu haben; und die Funktion φa wird die willkührliche Funktion seyn.

Diese Gleichung wird also die von der durch die continuirlichen Durchschnitte aller durch die Gleichung

$$z = a + x\,\varphi a + y\,f(a, \varphi a)$$

vorgestellten Ebenen, gebildeten Oberfläche seyn, wenn man den Parameter a (Nr. 157) successive variiren läßt. Diese wird folglich eine abwickelungsfähige Oberfläche seyn, weil man begreiffen kann daß die nemliche Berührungsebene, welche biegsam und unausdehnbar angenommen ist, sich auf die Oberfläche ohne Verdoppelungen und ohne Aufhebung der Stetigkeit appliciren und biegen läßt, und umgekehrt daß die Oberfläche sich auf die nemliche Ebene ohne Brüche und ohne sich zu falten appliciren und abwickeln läßt.

Weil $a = z - xx' - yz'$,

und $b = z'$,

so wird man

$$a' = -xx'' - yz'',$$
$$a_{,} = -xz'_{,} - yz_{,,},$$
$$b' = z'',$$
$$b_{,} = z'_{,},$$

haben, daher die Gleichung

$$a'\,b_{,} - a_{,}\,b' = 0$$

(der vorhergehenden Nummer)

werden wird

$$(xx'' + yz'_{,})z'_{,} - (xz' + yz_{,,})\,z'' = 0;$$

nemlich,

$$z_{,}'^{2} - z''\,z_{,,} = 0.$$

Dieses wird die allgemeine Gleichung der Abwickelungsfähigen Oberflächen seyn, deren ursprüngliche Gleichung folglich das System von diesen beyden

$z =$

$$z = a + x\,\varphi a + y\,fa,$$
$$\text{und } 1 + x\,\varphi' a + y\,f' a = 0$$

seyn wird, wo φa und fa zwey willkührliche Funktionen von a bezeichnen. Man sehe die bereits angeführten Werke (Nr. 155).

160.

Wenn man die größten oder die kleinsten Ordinaten z einer gegebenen Oberfläche verlangt, so ist es leicht zu begreiffen daß sie nur den Punkten entsprechen können, wo die Berührungsebene der Ebene von x und y parallel wird. Man wird also in diesen Punkten haben

$$\text{tg. } \omega = 0,$$
$$\text{und folglich } z'^2 + z_,^2 = 0 \text{ (Nr. 148)};$$

welches nur statt haben kann, wenn man zugleich $z' = 0$ und $z_, = 0$ macht. Dieses sind die nöthigen Bedingungen damit die Ordinate z ein Maximum oder ein Minimum werde.

Da z eine beliebige Funktion von x und y vorstellen kann, so wird man daraus allgemein schliessen, damit eine Funktion von zwey veränderlichen Größen ein Maximum oder Minimum werde, so müssen ihre zwey Erstefunktionen in Beziehung jeder dieser veränderlichen Größen Null seyn.

Aber man kann directe zu dieser Schlußfolge durch die Betrachtungen der Funktionen von einer einzigen veränderlichen Größe, nach der Theorie von Nr. 132 gelangen, und zu gleicher Zeit die nöthigen Bedingungen finden damit daß Maximum oder Minimum statt habe. In der That, wenn z eine Funktion von x und y ist so kann man x zuerst als gegeben ansehen, und das

Maximum oder Minimum von z in Beziehung auf y ſuchen. Man wird hiezu die Gleichung haben $z_{,} = o$, und nachher für das Maximum $z_{,,} < o$, und $z_{,,} > o$ für das Minimum. Wenn man alſo in z den für y aus der Gleichung $z_{,} = o$ gezogenen Werth ſetzt, ſo wird dieſe Größe z eine einfache Funktion von x, und wird ſchon ein Maximum oder Minimum in Beziehnng auf y ſeyn. Man darf ſie alſo nur nochmal zu Maximum oder Minimum in Beziehung auf die Größe x machen welche beſtändig angenommen war; da y jetzt als eine von x durch die Gleichung $z_{,} = o$ gegebene Funktion, angeſehen werden ſoll, ſo iſt klar daß die Erſtefunktion von z in Beziehung auf x nicht bloß $z'_{,}$ ſondern

$$z' + y'z_{,}$$

ſeyn wird, und ihre Zweytefunktionen auch in Beziehung auf x, wird ſeyn

$$z'' + 2y'z'_{,} + y'^{2}z_{,,} + y''z_{,,}$$

indem man immer durch y' und y'', die Erſten und Zweytenfunktionen von y in Beziehung auf x anzeigt.

Man wird alſo haben

$$z' + y'z_{,} = o;$$

und da man ſchon $z_{,} = o$ hat, ſo reducirt ſich dieſe zweyte Gleichung auf $z' = o$ dergeſtalt daß man für die Beſtimmung von x und y, die zwey Bedingungen $z' = o$, $z_{,} = o$, wie weiter oben hat.

Jetzt müſte man ferner noch

$$z'' + 2y'z'_{,} + y'^{2}z_{,,} + y''z_{,} < o$$

für das Maximum und $> o$ für das Minimum haben; Aber da y durch die Gleichung $z_{,} = o$, beſtimmt ſeyn ſoll, ſo wird es y' durch ſeine Erſtegleichung

$$z' + y'z_{,,} = o,$$

wel-

lche $y' = -\frac{z'_,}{z_{,,}}$ giebt.

Man hat alſo für das Maximum

$$z'' - \frac{z_,'^2}{z_{,,}} < 0,$$

nd für das Minimum

$$z'' - \frac{z_,'^2}{z_{,,}} > 0,$$

der, weil im erſten Falle $z_{,,}$ auch < 0, und im zweyten Falle > 0 ſeyn ſoll, ſo muß man ſowohl für das Maximum als für das Maximum haben,

$$z'' z_{,,} - z_,'^2 > 0.$$

Hieraus kann man ſchlieſſen daß die aus den Gleichungen $z' = 0$ und $z_, = 0$ gezogene Werthe von x und y, ein Maximum oder ein Minimum geben können, je nachdem man $z_{,,} <$ oder > 0 haben wird, wenn man nur zugleicher Zeit

$$z'' z_{,,} - z_,'^2 > 0$$

hat, welches, wie man ſieht, die Bedingung mit ſich bringt (emporte), daß z'' und $z_{,,}$ von einerley Zeichen ſeyen.

Alſo, wenn

$$z'' z_{,,} - z_,'^2 = \text{oder} < 0 \text{ iſt},$$

wird weder ein Maximum noch Minimum ſeyn, wenn nicht auch die Drittenfunktionen verſchwinden, in welchem Falle das Urtheil von den Viertenfunktionen abhangen wird, u. ſ. w.

Es iſt alſo für die Exiſtenz des Maximum und Minimum nicht hinlänglich, daß man $z' < 0$ oder > 0 oder $z'' > 0$ und $z_{,,} > 0$ habe, wie man aus dem XI Capitel des zweyten Theils der Eulerſchen Differentialrechnung ſchlieſſen könnte.

161.

Es ist leicht die vorhergehende Methode auf Funktionen von drey veränderlichen Größen anzuwenden. Angenommen u sey eine Funktion der drey veränderlichen Größen x, y, z; wenn man nun x und y zuerst als beständig, und z allein als veränderlich ansieht, so hat man nach der bereits angenommenen Bezeichnung (Nr. 103) $\partial u = o$ für die Bedingung des Maximum oder Minimum, und nachher $\partial u < o$ für das Maximum und $\partial u > o$ für das Minimum. Die Gleichung $\partial u = o$ wird den Werth van z in x und y geben, welchen man in die Funktion u ſubſtituirt oder ſubſtituirt denkt, da dieſe Funktion nur noch die zwey veränderlichen Größen x und y enthält, ſo kommt ſie durch jene Subſtitutionen in den Fall, welchen wir ſo eben aufgelößt haben, zurück.

Um allgemeine Formeln zu conſtruiren, muß man bemerken, daß, wenn u nur eine Funktion von x und y wäre, ſo hätte man für das Maximum und Minimum die Bedingungen $u' = o$ und $u_{,} = o$; nachher für das Maximum $u_{,,} < o$ und für das Minimum $u_{,,} > o$, und endlich $u'' u_{,,} - u'^{2}_{,} > o$ für beyde Fälle.

Weil aber u überdem noch z enthält, welche ſelbſt eine Funktion von x und y iſt, ſo werden die Werthe der durch u', $u_{,}$, u'', u. ſ. w. angezeigten Funktionen, bloß durch dieſe Größen ausgedrückt ſeyn, man muß aber die Glieder welche von der Größe z als Funktion von x und y betrachtet herkommen ſollen, hinzuſetzen. Alſo, wenn man die Erſten und Zweytenfunktionen von u nimmt, ſo wird man finden daß die Größe u' wird

$$u' + \partial u',$$

daß

daß die Größe $u_{,}$ wird

$$u_{,} + {}_{,}uz_{,}$$

daß die Größe u'' wird

$$u'' + 2\,{}_{,}u'z' + {}_{,}uz'' + {}_{,,}uz'^{2},$$

daß die Größe $u_{,,}$ wird

$$u_{,,} + 2\,{}_{,}u_{,}z_{,} + {}_{,}uz_{,,} + {}_{,,}uz_{,}^{2},$$

und daß die Größe $u'_{,}$ wird

$$u'_{,} + {}_{,}u_{,}z' + {}_{,}u'z_{,} + {}_{,}uz' + {}_{,,}uz'z_{,}.$$

Mithin hat man sogleich für das Maximum oder Minimum, die zwey Bedingungen

$$u' + {}_{,}uz' = 0,$$
$$u_{,} + {}_{,}uz_{,} = 0;$$

daher hat man wegen ${}_{,}u = 0$ diese drey Gleichungen

$$u' = 0,\ u_{,} = 0 \text{ und } {}_{,}u = 0;$$

d. h. die drey Erstenfunktionen von u in Beziehung auf x, $y_{,}$ z, jede gleich Null.

Ferner, wegen ${}_{,}u = 0$, wird man haben

$$u_{,,} + 2{,}u_{,}z_{,} + {}_{,}uz_{,}^{2} < 0$$

für das Maximum und > 0 für das Minimum, und für eins und das andere,

$$(u'' + 2{,}u'z' + {}_{,,}uz'^{2})\,(u_{,,} + 2{,}u_{,}z_{,} + {}_{,,}uz_{,}^{2})$$
$$> (u_{,}' + {}_{,}u_{,}z' + {}_{,}u'z_{,} + {}_{,,}uz'z_{,})^{2}.$$

Da aber der Werth von z in x und y von der Gleichung ${}_{,}u = 0$ abhängt, so wird man ihre beyden Erstengleichungen nach x und y nehmen, um die Werthe von z' und von $z_{,}$ zu haben; Man wird also haben

$${}_{,}u' + {}_{,,}uz' = 0$$
und ${}_{,}u_{,} + {}_{,,}uz_{,} = 0$.

Daraus zieht man

$$z' = -\frac{{}_{,}u'}{{}_{,,}u},$$

$$\text{und} \quad z_{,} = -\frac{{}_{,}u_{,}}{{}_{,,}u}.$$

Man wird alſo dieſe Werthe ſubſtituiren, und da man ſchon $_{,,}u < o$ für das Maximum und $> o$ für das Minimum gefunden hat, ſo wird man, wenn man die erſte Bedingung durch $_{,,}u$ multiplicirt eine Größe haben, welche immer $> o$ ſeyn ſollte. Daher reduciren ſich die Bedingungen für das Maximum oder Minimum auf folgende drey

$_{,,}u < o$ für das Maximum und $> o$ für das Minimum,

$$_{,,}u\, u_{,,} - {}_{,}u_{,}^{2} < o, \text{ und}$$

$$(_{,,}u\, u'' - {}_{,}u'^{2})\,(_{,,}u\, u_{,,} - {}_{,}u_{,}^{2}) > (_{,,}u\, u'_{,} - {}_{,}u'\,{}_{,}u_{,})^{2}.$$

Man ſieht aus dem Gange dieſer Methode, wie ſolche ſich auf eine größere Anzahl von veränderlichen Größen erſtrecken kann, und kann daraus ſogleich allgemein ſchlieſſen, daß man die Gleichungen vom Maximum oder Minimum einer beliebigen Funktion von mehrern veränderlichen Größen haben wird, wenn man die Erſtenfunktionen von dieſer Funktion, in Beziehung auf jede dieſer veränderlichen Größen genommen, gleich Null ſetzt; welches eben ſo viele Gleichungen als veränderliche Größen geben wird. Was die andern zur Exiſtenz des Maximums oder Minimums nöthigen Bedingungen betrift, ſo wird man ſie ſucceſſive durch die eben dargelegten Principien und Formeln finden

162.

Um von der Methode des Maximum und Minimum ein Beyſpiel zu geben, ſo wollen wir annehmen man verlange

lange die kürzeste Entfernung zwischen zwey im Raume der Lage nach gegebenen graden Linien. Für eine dieser graden Linien sey x die Abscisse so werden die zwey Ordinaten von dieser Form

$$a + bx \text{ und } c + dx$$

seyn; Es sey gleichfalls für die andere grade Linie y die Abscisse auf der nemlichen Axe genommen; die auf der nemlichen Axe als jene der ersten graden Linien bezogenen Ordinaten werden von dieser Form

$$A + By, \text{ und } C + Dy$$

seyn; daher, das Quadrat der Entfernung zwischen den beyden Punkten die den Abscissen x und y entsprechen, durch diese Formel

$$(x-y)^2 + (a-A+bx-By)^2 + (c-C+dx-Dy)^2$$

ausgedrückt seyn wird, welche wir mehrerer Einfachheit wegen gleich 2 z setzen.

Indem man die abgeleiteten Funktionen nimmt, so wird man haben

$$z' = (x-y)+b(a-A+bx-By)+d(c-C+dx-Dy),$$
$$z_, = -(x-y)-B(a-A+bx-By)-D(c-C+dx-Dy),$$
$$z'' = 1 + b^2 + d^2,$$
$$z_{,,} = 1 + B^2 + D^2,$$
$$z'_, = -1 - bB - dD.$$

Mithin, wird man I. für die Bestimmung der zwey unbekannten Größen x und y die Gleichungen

$$x - y + b(a - A + bx - By) + d(c - C + dx - Dy) = 0,$$
$$x - y + B(a - A + bx - By) + D(c - C + dx - Dy) = 0$$

haben.

II. Weil der Werth von z'' nothwendig positiv ist, so kann nur ein Minimum statt haben, aber man muß

über

überdem noch die Bedingung

$$z''z_{,,} - z_{,}'^{2} > 0$$

haben; nemlich

$(1+b^2+d^2)(1+B^2+D^2) - (1+bB+dD)^2 > 0$

dieß hat aber ſtatt, welches auch immer die Werthe von b, d, B, D ſeyn mögen; denn die gegenwärtige Bedingung kann unter dieſe Form

$$(b-B)^2 + (d-D)^2 + (bD-dB)^2 > 0$$

geſetzt werden.

Da die Gleichungen zwiſchen x und y lineariſch ſind, ſo hat die Beſtimmung dieſer Größen gar keine Schwierigkeit; wir werden uns dabey nicht aufhalten, um ſo mehr da dieſes Problem einer ſehr eleganten geometriſchen Auflöſung fähig iſt.

163.

Man kann noch in der Unterſuchung der Maxima und Minima der Funktionen von mehreren unbeſtimmten Größen, alle veränderliche Größen auf einmal betrachten, welches directer und heller iſt. Es ſey in der That $f(x, y, z, u \ldots)$ die vorgegebene Funktion, wenn man annimmt daß die Größen x, y, z, u, u. ſ. w. ſchon den für das Maximum oder Minimum gehörigen Werth hätten, ſo müßte indem man

$$x+p,\ y+q,\ z+r,\ u+s,\ \text{u. ſ. w.}$$

an die Stelle von x, y, z, u, u. ſ. w. in die Funktionen von welcher die Rede iſt ſetzen, ihr Werth im Falle des Maximums immer kleiner werden, und in dem Falle des Minimums immer größer werden, welches auch immer die Werthe von p, q, r, s, u. ſ. w. ſeyn mögen und wie immer ſie ſeyn mögen, dieß folgt aus der Natur des Maximum oder des Minimum ſelbſt (Nr. 132).

Laß

Laßt uns die Funktion

$$f(x+p, y+q, z+r, u+s\ldots)$$

nach den Potenzen und Producten der Größen p, q, r, s, u. ſ. w. vermittelſt den Formeln des allgemeinen Theorems (Nr. 147.) entwickeln, und bey den erſten Gliedern dieſer Entwickelung einhalten.

Wenn man bloß (ſo als wir es bisher ausgeübt haben) durch

$$f'(x),\ f'(y),\ f'(z),\ f'(u),\ \text{u. ſ. w.}$$

die Erſtenfunktionen von der Funktion

$$f(x, y, z, u\ldots.),$$

in Beziehung auf x, y, z, u, u. ſ. w. für ſich betrachtet genommen, anzeigt, und man ferner durch

$$f''(x),\ f''(x,y),\ f''(y),\ f''(x,z),$$
$$f''(y,z),\ f''(z),\ \text{u. ſ. w.}$$

die Zweytenfunktionen von der Funktion

$$f(x+\lambda p, y+\lambda q, z+\lambda r, u+\lambda s\ldots.),$$

in Beziehung auf x allein auf x und y, auf y allein, auf x und z, auf y und z genommen anzeigt; u. ſ. w., ſo wird man haben

$$f(x+q, y+q, z+r, u+s\ldots)$$
$$= f(x,y,z,u\ldots)+pf'(x)+qf'(y)+rf'(z)+sf'(u)+\text{u.ſ.w.}$$
$$+\tfrac{1}{2}p^2f''(x)+pqf''(x,y)+\tfrac{1}{2}q^2f''(y)+prf''(x,z)$$
$$+qrf''(y,z)+\text{u. ſ. w.}$$

Der Coeffizient λ zeigt eine zwiſchen o und 1 enthaltene unbeſtimmte Zahl an, der der nemliche in derſelben Funktion ſeyn wird, aber verſchieden in den verſchiedenen Funktionen ſeyn kann.

Es muß alſo die Größe

$$pf'(x)+qf'(y)+rf'(z)+sf'(u)+\text{u.ſ.w.}$$
$$+\tfrac{1}{2}p^2f''(x)+pqf''(x,y)+\tfrac{1}{2}q^2f''(y)+\text{u. ſ. w.}$$

immer für das Minimum poſitiv und für das Maxi-

mum

mum negativ seyn, wenn man p, q, r, u. s. w. beliebige noch so kleine Werthe giebt. Man wird daraus zuerst durch ein dem in Nr. 132 analogen Raisonnement folgern, daß diese Bedingung nicht erfüllt werden könnte, wenn nicht wenigstens die durch die ersten Potenzen von p, q, r u. s. w. multiplicirten Glieder, jedes für sich Null sey, welches die Gleichungen

$$f'(x) = 0, \quad f'(y) = 0,$$
$$f'(z) = 0, \quad f'(u) = 0, \text{ u. s. w.}$$

geben wird, die dem Maximum und Minimum gemein sind, und die da sie in der nemlichen Anzahl als die unbestimmten Größen p, q, r, s, u. s. w. sind, ihre Werthe zu bestimmen dienen werden.

164.

Aber, damit diese Werthe wirklich ein Maximum oder ein Minimum geben, so müßte noch die übrig bleibende Größe

$$\tfrac{1}{2}p^2 f''(x) + pqf''(x, y) + \tfrac{1}{2}q^2 f''(y) +$$
$$prf''(x, z) + qrf''(y, z) + \tfrac{1}{2}r^2 f''(z) + \text{u. s. w.}$$

immer für das Minimum positiv und für das Maximum negativ seyn, welches auch immer die Werthe von p, q, r u. s. w. seyn mögen, und wie klein sie auch immer seyn könnten.

Da die Funktionen

$$f''(x), f''(x, y), \text{ u. s. w.}$$

welche die Quadrate und die Producte der Größen p, q, r u. s. w. multipliciren, selbst diese Größen enthalten, so könnte es schwer seyn, und vielleicht unmöglich die nöthigen Kennzeichen zu bestimmen, damit die in Redestehende Bedingung aufs strengste statt habe; ich bemerke aber, daß wenn man $\lambda = 0$ setzt, so werden diese Funktionen

von

on p, q, r, u. ſ. w. unabhängig, und haben beſtimmte Werthe; und man findet alsdann, wie wan es augenblicklich ſehen wird, Bedingungen zwiſchen dieſen nemlichen Funktionen, welche in nichts anders beſtehen als in Ungleichheiten zwiſchen den zuſammengeſetzten Größen dieſer Funktionen.

2. Nimmt man an, daß dieſe Ungleichheiten für beſtimmte Werthe von x, y, z, u. ſ. w. ſtatt haben, ſo werden ſie noch ſtatt haben für die von jenen ſehr wenig unterſchiedenen Werthe

$$x + \lambda p,\quad y + \lambda q,\quad y + \lambda r,\ \text{u. ſ. w.}$$

ſo lange als die Größen λp, λq, λr, u. ſ. w., nicht gewiſſe Gränzen überſchreiten, die ſo wenig ausgedehnt ſeyn könnten als man wollte. Mithin, weil die für das Maximum oder Minimum erforderliche Bedingung nur für beliebige Werthe von p, q, r, u. ſ. w, ſo klein als man will, erfüllt zu werden braucht, ſo folgt daraus, daß es genüget dieſer Bedingung in dem Falle von $\lambda = 0$ zu befriedigen; Folglich könnte man ſogleich $\lambda = 0$ ſetzen, welches die Funktionen

$$f'(x),\quad f''(x, y),\quad f''(y),\ \text{u. ſ. w.}$$

reducirt, die in obiger Größe übergehen

$\frac{1}{2}p^2 f''(x) + pq f''(x, y) + \text{u. ſ. w.}$, nichts weiter als die Zweykenfunktionen von der gegebenen Funktion

$$f(x, y, z, u \ldots)$$

in Beziehung auf x allein, auf x und y genommen u. ſ. w. ſeyn.

165.

Alles kömmt alſo darauf an, die Bedingungen zu finden damit eine Größe von dieſer Form

$$Ap^2 + Bpq + Cq^2 + Dpr + Eqr + Fr^2 + \text{u. ſ. w.}$$

in welcher A, B, C, u. ſ. w. gegebene Größen ſind, u
p, q, r, u. ſ. w. bezeichnen die unbeſtimmten Größen, nc
wendig immer poſitiv oder negativ ſey, welches auch
mer die Werthe von p, q, r, u. ſ. w. ſeyn mögen.

Geſetzt, daß ſie immer poſitiv ſeyn ſollte, ſo iſt
genſcheinlich, daß für den entgegengeſetzten Fall, es
nügte die Coeffizienten A, B, C, u. ſ. w. negativ zu n
men. Weil dieſe Größe niemals negativ werden ka
ſo folgt daraus, daß ſie ein poſitives Minimum hal
muß; und umgekehrt, wenn ſie nichts als poſitive Mi
ma hat, ſo kann ſie niemals negativ werden. Man d
alſo nur die nöthigen Bedingungen ſuchen damit die
Redeſtehende Größe lauter poſitive Minima habe.

Dem Geiſte der oben (Nr. 161) auseinandergeſetz
Methode zufolge, nimmt man die Erſten und Zweytenfu
tionen von der vorgegebenen Größe in Beziehung ei
einzigen veränderlichen Größe, wie p, und man ſetzt
Erſtefunktion gleich Null, und die Zweytefunktion poſi
Man hat alſo die Gleichung

$$2Ap + Bq + Dr + \ldots = 0,$$

und die Bedingung $A > 0$.

Man wird den aus der vorhergehenden Gleichu
gezogenen Werth von p, in die vorgegebene Größe
tuiren, welche daher von dieſer Form wird:

$$Lq^2 + Mqr + Nr^2 + Pqs + \ldots,$$

wo

$$L = C - \frac{B^2}{4A}, \quad M = E - \frac{BD}{2A},$$

$$N = F - \frac{D^2}{4A}, \text{ u. ſ. w. iſt.}$$

Auf eben die Art, wird man die Erſten und Zw
tenfunktionen von dieſer veränderten in Beziehung auf

r einzigen veränderlichen Größe q, und macht man die rſtefunktion gleich Null, und die Zweytefunktion poſitiv, wird man von neuen die Gleichung haben.

$$2Lq + Mr + Ps + \ldots = o,$$

ıd die Bedingung $L > o$.

Man ſubſtituirt eben ſo in der vorhergehenden verän- rten Gleichung, den Werth von q, welcher aus dieſer leichung gezogen iſt; ſo wird man die neue transfor- irte haben

$$Tr^2 + Vrs + Xs^2 + \ldots,$$

welcher die Coefficienten T, V, X ... in L, M, N ... geben ſind, wie dieſe es in A, B, C ... ſind; und ver lgt man das nemliche Verfahren, ſo wird man die Glei- ung

$$2Tr + Vs + \ldots = o,$$

ıd die Bedingung $T > o$ haben; u. ſ. w.

Jetzt iſt es leicht zu ſehen, daß die letzte dieſer tranſ- rmirten Gleichungen, diejenige, welche nur noch eine ne einzige von den unbeſtimmten Größen p, q, r ..., ıthalten wird, und die daher von dieſer Form Zs^2 ſeyn ird, ſelbſt das Minimum der vorgegebenen Größe yn; woraus folgt, daß die Bedingungen damit dieſe röße ein poſitives Minimum habe, ſeyn werden

$> o$, $L > o$, $T > o \ldots . Z > o$; und da die Glei- ungen welche die Werthe von p, q, r, ..., beſtimmen le Liniäriſch ſind, ſo wird man daraus ſchlieſſen daß eſes Minimum daß einzige ſeyn wird welches ſtatt ha n könnte. Folglich iſt das Problem ſtrenge aufgelöſt.

Es iſt uebrigens leicht zu ſehen, daß durch dieſe ver- ſchiedenen Transformationen (Umwandlungen), die vor- gebene Größe von folgende Form wird:

$$A\left(p + \frac{Bq + Dr + \ldots}{2A}\right)^2 +$$

$$L\left(q + \frac{Mr + Ps + \ldots}{2L}\right)^2 +$$

$$T\left(r + \frac{Vs + \ldots}{2T}\right)^2 + \quad \text{u. f. w.}$$

welche augenſcheinlich immer poſitiv oder negativ ſeyn wird, je nachdem daß die Coefficienten A, L, T, u. ſ. w. es alle zugleich ſeyn werden; und man zugleichen Zeit durch die Form, daß die Größen A, L, T, u. ſ. w. Null ſeyn könnten, wenn ſie es nur nicht alle auf einmal ſind.

Die Bedingungen, welche wir ſo eben gefunden haben, werden alſo diejenigen des Maximums oder Minimums der Funktion

$$f(x, y, z, u \ldots),$$

indem man für das Minimum

$A = f''(x)$, $B = f''(x, y)$, $C = f''(y)\ldots$

und für das Maximum

$A = -f''(x)$, $B = -f''(x, y)$, $C = -f''(y)\ldots$

macht. Es iſt leicht die Uebereinſtimmung von dieſen Reſultaten mit jenen von Nr 161 zu ſehen; Aber die vorhergehende Methode hat den Vorzug ein einfaches Mittel an die Hand zu geben dieſe Reſultate auf eine beliebige Anzahl von veränderlichen Größen ausdehnen zu können

166.

Die bisher über die Theorie von Maximum und Minimum vorgetragenen Principien, leiten zu dieſer allgemeinen Schlußfolge: Wenn man in einer beliebigen Funktion von veränderlichen Größen $x, y, z\ldots$, an die Stelle dieſer veränderlichen Größen die Größen $x + p$, $y + q$, $z + r, \ldots$ ſetzt, und man die Funktion nach den Potenzen und den Producten dieſer Größen $p, q, r, \ldots$

ent

ntwickelt, ſo werden, die Glieder worin dieſe Größen ich nur in der erſten Dimenſion finden, wenn eine jede ür ſich gleich Null geſetzt wird, die nöthigen Gleichun- en geben damit die vorgegebene Funktion ein Maxi- mum oder Minimum werde; nachher wird man die us allen Gliedern zuſammengeſetzte Größe wo p, q, r.... wey Dimenſionen bilden betrachten, und es müßte dieſe Größe für das Minimum immer poſitiv und für das Maximum immer negativ ſeyn, welches auch immer die Werthe von p, q, r,.... ſeyn können.

Wenn alle dieſe Glieder auf einmal verſchwänden, o müßten alsdenn für die Exiſtenz des Maximums oder Minimums, alle die Glieder wo p, q, r, u. ſ. w. ie drey Dimenſionen bilden, auf einmal verſchwinden, nd die Größe, welche aus Gliedern wo p, q, r, . . . be- iebige Werthe haben, u. ſ. w. Welches, wie man ſieht em Theorem vnn Nr. 132 entſpricht.

Wir haben oben ein einfaches Mittel gegeben um die edingungen zu finden, welche eine Größe von der Form

$$Ap^2 + Bpq + \ldots$$

mer poſitiv oder negativ macht; man könnte auf eben die et diejenigen ſuchen, welche die Größen von der Form $p^4+Bp^3q+\ldots$ immer poſitiv machten; aber die Anwen- ung der allgemeinen Methode auf dieſen Fall wäre Schwie- igkeiten des Calculs unterworfen, welche ſie unausführ- r machen könnte; und dieſes iſt ein Problem der Alge- a wovon eine vollſtändige Auflöſung zu wünſchen wäre.

167.

Wir haben bisher vorausgeſetzt, daß die veränderli- en Größen, welche in der Funktion hineinkommen, von ander unabhängig ſind; wenn aber zwiſchen ihnen eine er mehrere Gleichungen wären, ſo müßte man anfangen

vermittelst dieſen Gleichungen, eben ſo viel veränderliche Größen in der vorgegebenen Funktion zu eliminiren, nachgehends ſuchte man die Bedingungen des Maximums oder Minimums in Rückſicht der in der Funktion gebliebenen veränderlichen Größen. Dieſes iſt die Methode, welche ſich ganz natürlich darbietet; man kann ſie aber viel vereinfachen, indem man alle veränderliche Größe beybehält, und die Eliminirung auf die einzigen Größen p, q, r . . . zurückbringt.

In der That, geſetzt man hätte zwiſchen den veränderlichen Größen x, y, z u. ſ. w. die Gleichung

$$\varphi(x, y, x \ldots) = 0;$$

Da dieſe Gleichung für jeden Werth von x, y, z . . . ſtatt haben ſoll, ſo wird ſie auch ſtatt haben, wenn man

$$x + p,\ y + q,\ z + r, \ldots$$

an die Stelle von x, y, z, . . . ſetzt; folglich wird man durch eine ähnliche Entwickelung als Nr. 163. die Gleichung

$$p\varphi'(x) + q\varphi'(y) + r\varphi'(z) + \ldots,$$
$$+ \tfrac{1}{2}p^2\varphi''(x) + pq\varphi''(x, y) + \tfrac{1}{2}q^2\varphi''(y) + \ldots = 0$$

haben, woraus man den Werth von in einer Reihe ziehen könnte, welchen man in die Entwickelung der Funktion die ein Maximum oder ein Minimum ſeyn ſoll, ſubſtituirt; oder welches gleichviel iſt, man ſetzt zu dieſer Entwickelung bloß die Größe die die erſte Seite der vorhergehenden Gleichung ausmacht, welche durch eine beliebige unbeſtimmte Größe multiplicirt wird, die ſelbſt von dieſer Form

$$a + bp + cq + dr \ldots$$
$$+ lq^2 + mpq + \ldots,$$

ſeyn kann, wo die Coefficienten a, b, c . . . unbeſtimmt ſeyn können, und man wird alle Glieder, welche die Grö-

ſe

ſe p enthalten gleich Null ſetzen, welches dazu dient die unbekannten Größen a, b, c . . . zu beſtimmen.

Da die Gleichungen des Maximum oder Minimum aus der Verſchwindung der Glieder, wo die Größen p, q, r . . . nur von der erſten Dimenſion ſind, entſtehen, ſo iſt es hinlänglich jedes dieſer Glieder gleich Null zu ſetzen, welches auf der Stelle die Gleichungen

$$f'(x) + a\varphi'(x) = 0,$$
$$f'(y) + a\varphi'(y) = 0,$$
$$f'(z) + af'(z) = 0,$$

u. ſ. w.

geben wird, welche man nachher durch die Eliminirung der unbekannten Größe a auf eine weniger bringt. In Rückſicht der Glieder, wo die Größen p, q, r . . . zwey Dimenſionen machen, wird man, durch die oben vorgetragenen Methoden, die Bedingungen beſtimmen, welche zwiſchen den Coeffizienten dieſer Glieder ſtatt haben ſollen, und man wird vermittelſt der willkührlichen Größen b, c, d . . . dieſe Bedingungen auf die allgemeinſte Art zu befrieden ſuchen.

Wir zeigen hier dieſe Verfahrungsarten davon die Anwendung leicht iſt, nur an; aber man kann ſolche auf dieſes allgemeine Prinzip zurückführen: Wenn eine Funktion von mehreren veränderlichen Größen ein Maximum oder Minimum ſeyn ſoll, und zwiſchen dieſen veränderlichen Größen eine oder mehrere Gleichungen vorhanden ſind, ſo iſt es hinlänglich zu der vorgegebenen Funktion diejenigen Funktionen hinzuzuſetzen, welche Null ſeyn ſollen, jede durch eine unbeſtimmte Größe multiplicirt, und nachher das Maximum oder Minimum zu ſuchen, ſo als wenn die veränderlichen Größen unabhängig wären; die Gleichungen welche man mit den gegebenen Glei-

chungen combinirt finden wird, werden dienen alle unbekannte Größen zu bestimmen.

168.

Man kann, durch die nemlichen Principien die Fragen auflösen, wo es darauf ankömmt die Curven zu finden die in jeden ihrer Punkte, einige Eigenschaften des Maximums oder Minimums besitzen.

Gesetzt, z. B. man verlangte die Curve in welcher die Größe, welche wir in dem Probleme von Nr. 122 K genannt haben, ein Maximum oder Minimum in jedem Punkte der Curve sey. Diese Größe ist durch die Funktion

$$[y + (m - x)y'][y + (n - x)y']$$

ausgedrückt; und die Frage bestehet darin den Werth von y' in x zu finden, welcher diese Funktion zu einem Maximum oder Minimum macht. Wenn die beyden Größen y und y' von einander unabhängig waren, so könnte man das Maximum oder Minimum in Beziehung auf jeder dieser veränderlichen Größen bestimmen (Nr. 160).

Aber da diese Größen eine aus der andern herkömmt, und ihre Relation, so lange als eine von ihnen nicht eine bestimmte Funktion von x ist, unbekannt bleibt, so kann man das Maximum oder Minimum nur in Beziehung auf einer dieser Größen suchen; und es ist natürlich die Größe y', welche die Lage der Tangente bestimmt für veränderlich zu nehmen, indem man die Coordinaten x und y als für jeden Punkt der Curve gegeben ansieht.

Man wird also die Ersten und Zweytenfunktionen der vorgegebenen Funktion in Beziehung auf die Größe y' als allein veränderlich angesehen nehmen; und wenn man die

: Erstefunktion gleich Null setzt so wird man auf der
telle die Gleichung

$$[y + (n - x)y'](m - x) + [y + (m - x)y'](m - x) = 0$$

ben, welche wie in dem Falle Nr. 122.

$$y' = \frac{(2x - m - n)y}{2(m - x)(n - x)}$$

r die Gleichung der gesuchten Curve giebt.

Nachher wird man die Zweytefunktion

$$2(m - x)(n - x)$$

iben, welche zeigt das das Maximum für alle Theile
r Curve statt haben wird, für welche die zwey Größen
— x und n — x von entgegengesetzten Zeichen seyn
erden, und daß das Minimum für die Theile wo
— x und n — x einerley Zeichen haben werden, statt
ndet (Nr. 160). Das Maximum wird demnach für
lle von x zwischen den Grenzen m und n enthaltene
Derthe statt haben, und das Minimum für die Wer-
je von x welche außerhalb dieser Grenzen fallen.

Wenn die für die Gleichung gefundene Curve von
er ersten Ordnung ist so ist sie einer ursprünglichen Glei-
ung mit einer willkührlichen beständigen Größe fähig
nd wenn man sie unter die Form

$$\frac{2y'}{y} = \frac{1}{x - m} + \frac{1}{x - n}$$

zt, so wird man auf der Stelle diese ursprüngliche Glei-
ung

$$2\lg.y = \lg.(x - m) + \lg.(x - n) + \lg.h$$

bleiten, und wenn man von den Logarithmen zu den
ahlen übergeht, so hat man

$$y^2 = h(x - m)(x - n)$$

wo h eine willkührliche beſtändige Größe iſt. Dieſe Gleichung iſt von der Form wie die welche wir in dem citirten Orte (Nr. 122) gefunden haben; welches ſeyn muß, weil die eine ſowohl als die andere von der nemlichen Gleichung der erſten Ordnung kömmt. In der That, die eben für das Maximum oder Minimum gefundene Gleichung, hat, wenn ſie durch y'' multiplicirt wird, zur urſprünglichen Gleichung

$$[y + (m - x)\,y'][y + (n - x)\,y'] = K,$$

wo K eine willkührliche beſtändige Größe iſt; und dieſe hier mit der nemlichen Gleichung combinirt um daraus y' zu eliminiren, wird das in denſelben Orte gefundene Reſultat geben.

Wenn man alſo dieſe Auflöſung der von Nr. 122 näher bringt, ſo wird man allgemein daraus folgern, daß die Kegelſchnitte nicht allein die ſchon gefundene Eigenſchaft haben, daß jede Tangente die auf den beyden Enden der Axe errichteten perpendiculairen Theile ſchneidet deren Product beſtändig iſt; aber überdem noch dieſe hier, daß die Lage der Tangente an jedem Punkte der Curve, als gegeben angeſehen, ſo beſchaffen iſt daß das nemliche Product ein Maximum für die Ellipſe, und ein Minimum oder vielmehr ein negatives Maximum für die Hyperbel iſt.

169.

Ueberhaupt, wenn man eine Curve verlangt in welcher eine gegebene Funktion von x, y, y', y''.... ein Maximum oder ein Minimum ſeyn wird, ſo könnte man das Maximum oder Minimum in Beziehung auf jeder der Größen y, y', y''.... ſuchen, welches eben ſo viele verſchiedene Auflöſungen geben wird; und man hätte immer, allgemein geſprochen, für die geſuchte Curve, eine

Glei-

Gleichung von derſelben Ordnung als die vorgegebene Funktion.

Wenn dieſe Funktion eine bloße Funktion von den Elementen a, b, c ..., der Berührung wäre (Nr. 117), ſo würde man, indem man das Maximum oder Minimum in Beziehung auf die letztere der Größen $y, y', y'' \ldots$ ſuchte, nothwendig die nemliche Gleichung finden, welche man für das Problem haben würde in welchen man dieſelbe Funktion einer beſtändigen Größe gleich ſetzte; davon kann man ſich leicht durch die Analyſis von Nr. 123 und 127 überzeugen.

In der That, wenn man die Erſtefunktion von $f(a, b, c \ldots)$, welche in Beziehung der höchſten der abgeleiteten Funktionen $y', y'' \ldots$ genommen iſt, gleich Null ſetzt, ſo wird man die nemliche Gleichung haben als wenn man, allgemein, die Erſtefunktion der Gleichung $f(a, b, c \ldots) =$ einer beſtändigen Größe in Beziehung auf $x, y, y' \ldots$, nähme.

Hieraus ſieht man, daß dieſe zwey Arten von Problemen, ob ſie gleich im Grunde ſehr verſchieden ſind, demohngeachtet auf einerley Reſultat führen, und ſind folglich einerley Auflöſung fähig. Man kann alſo alles was in den citirten Stellen geſagt iſt, hier anwenden Das Beyſpiel der vorhergehenden Nummer iſt wie man ſieht, ein beſonderer Fall von dieſen nemlichen Problemen.

170.

Wenn man aber die Curve verlangte in welcher das Maximum oder Minimum nicht die gegebene Funktion von $x, y, y', y'', \ldots$ wäre. Sondern die urſprüngliche Funktion von dieſer hier, als eine Erſtefunktion betrachtet, alsdann wird es nicht mehr erlaubt ſeyn, die Größen $y, y', y'' \ldots$ als

als unabhängig und isolirt zu betrachten, weil die ursprüngliche Funktion einer Funktion dieser Größen selbst von der Relation welche sie unter sich haben können abhängt. Die Probleme dieser Art sind die, welche sich auf den Calcul beziehen der unter den Nahmen Variationscalcul bekannt ist; sie fodern keine neue Analysis, aber eine speciale Anwendung der Analysis der Funktionen. Wir glauben daß wegen der Wichtigkeit der Materie, wir solche hier vortragen müssen.

Es sey die Funktion

$$f(x, y, y', y'' \ldots)$$

gegeben in welcher y als eine Funktion von x angenommen ist, so ist augenscheinlich, daß man nicht, allgemein gesprochen, die ursprüngliche Funktion von dieser gegebenen Funktion haben kann ohne den Werth von y in x zu kennen. Aber man kann suchen was für ein Werth es seyn müste, damit die ursprüngliche Funktion von

$$f(x, y, y', y'' \ldots),$$

ein Maximum oder ein Minimum würde, indem man voraussetzt daß diese Funktion Null sey, wenn x ein gegebenen Werth a hat, und daß sie ein Maximum oder ein Minimum wird, wenn x ein gegebenen Werth b hat. Es ist Sonnenklar daß, wenn man y für den gesuchten Werth nimmt, so müßte, vermöge der Natur des Maximum oder Minimum, die ursprüngliche Funktion von der Funktion

$$f(x, y+\omega, y'+\omega', y''+\omega'' \ldots)$$

welche aus der gegebenen Funktion hervorgehet, wenn man $y+\omega$ an die Stelle von y setzt, immer zwischen den nemlichen Gränzen von x seyn, kleiner im Falle des Maximum und größer im Fall des Minimum, als die ursprüngliche Funktion von

$f(z,$

$$f(x, y, y', y'' \ldots.),$$

lches auch immer der Werth von w seyn mag, den man
s eine beliebige Funktion von x anſehen könnte, und wie
mer klein dieſer Werth auch ſeyn könnte.

Die Funktion

$$f(x, y + w, y' + w', y'' + w'' \ldots.),$$

nn ſie nach den Pdtenzen und den Producten von w, w',
'', ... entwickelt iſt, auf eine ähnliche Art als diejenige
twickelung von Nr. 163, wird

$$f(x, y, y', y'' \ldots.) + wf'(y) + w'f'(y') + w''f'(y'') + \ldots. + \tfrac{1}{2}w^2 f''(y) + ww'f''(y, y') + \tfrac{1}{2}w'^2 f''(y') + \ldots.;$$

o die Größen

$$f'(y),\ f'(y'),\ f'(y'') \ldots.$$

ie Erſtenfunktionen von

$$f(x, y, y', y'', \ldots.)$$

ach y, y', y'' .... genommen, bezeichnen, und die Grö-
en

$$f''(y),\ f''(y, y'),\ f''(y'), \ldots.$$

eichnen die Zweytenfunktionen von der Funktion

$$f(x, y + \lambda w, y' + \lambda w', y'' + \lambda w'' \ldots.),$$

n Beziehung auf y allein, auf y und y', auf y' allein ge-
ommen, u. ſ. w; die Zahl λ iſt unbeſtimmt, oder viel-
ehr unbekannt, und kann in den verſchiedenen Funktio-
en verſchieden ſeyn, muß aber die nemliche in einerley
unktion ſeyn, und muß immer zwiſchen den Grenzen o
nd 1 enthalten ſeyn.

Es muß daher die urſprüngliche Funktion von der
röße

$$wf'(y) + w'f'(y') + w''f''(y'') + \ldots.$$

$$+\frac{\omega^2}{2}f''(y)+\omega\omega' f''(y,y')+\frac{\omega'^2}{2}f''(y')+\ldots;$$

immer für das Maximum einen negativen Werth haben, und für das Minimum einen positiven Werth, was für einen Werth man auch der Funktion ω gegeben mag, und so klein auch dieser Werth immer seyn kann, indem man diese ursprüngliche Funktion dergestallt nimmt, daß sie Null sey, wenn $x = a$ ist, und man darin nachher $x = b$ macht.

Es ist aber gewiß daß man ohne die Größe ω zu kennen, beweisen kann daß es immer möglich ist sie so klein zu nehmen damit die ursprüngliche Funktion von dem Theile welcher nur die ersten Dimensionen von ω, ω', ω'', ... enthält, einen größern Werth habe, positiv oder negativ, als die ursprüngliche Funktion des andern Theils.

Denn wenn man $i\omega$ an die Stelle von ω setzt, wo ω eine beliebige veränderliche Größe ist, und i ein beständiger Coefficient, so wird der erste Theil ganz in i multiplicirt seyn, und der zweyte Theil durch i^2, und ihre ursprüngliche Funktionen werden auch durch i und durch i^2 multiplicirt seyn; und es ist sichtbar, daß man immer im Stande ist i einen so kleinen Werth zu geben damit daß die erste dieser Funktionen die zweyte übertrift, wenigstens so lange als sie nicht Null ist. Hieraus schließt man, daß man die Größe ω immer klein genug nehmen kann damit daß der ganze Werth der in Rede stehenden ursprünglichen Funktion nothwendig positiv oder negativ sey, je nachdem es die von dem ersten Theile dieser Funktion seyn wird. Aber es ist sichtbar, daß diese hier ihre Zeichen verändern muß, sobald man das Zeichen von der Größe ω verändert.

Es ist also unmöglich, daß die ganze Funktion beständig positiv oder negativ, unabhängig von dem Werthe von ω sey, wenn nicht wenigstens die ursprüngliche Funktion des ersten Theils welcher nur die ersten Dimensionen von $\omega, \omega', \omega'', \ldots$ enthält, Null ist, was auch immer der Werth von w seyn mag. Daher kann das Maximum oder Minimum nicht anders statt haben, als wenn die ursprüngliche Funktion von der Funktion

$$\omega f'(y) + \omega' f'(y') + \omega'' f'(y'') + \ldots$$

nicht Null ist, was auch immer der Weeth von ω seyn mag.

Wäre diese Funktion Null, so müßte alsdann die ursprüngliche Funktion des andern Theils

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 f''(y) + \omega\omega' f''(y, y') + \tfrac{1}{2}\omega'^2 f''(y') + \ldots$$

für das Minimum positiv, und negativ für das Maximum seyn, indem man ω einen beliebigen noch so kleinen Werth als man will giebt.

171.

Um die erste dieser Bedingungen auf die allgemeinste Art zu befriedigen, so bemerken wir, daß, weil die Größe w unbestimmt bleiben soll, so kann die ursprüngliche Funktion von der Funktion

$$\omega f'(y) + \omega' f'(y') + \omega'' f'(y'') + \ldots$$

nur von der Form

$$\alpha + \omega\beta + \omega'\gamma + \omega''\delta + \ldots$$

seyn, wo die höchste der abgeleiteten Funktionen $\omega', \omega'', \ldots$ um eine Ordnung geringer als die vorgegebene Funktion ist; hiervon überzeugt man sich leicht durch ein wenig Ueberlegung über die Form der abgeleiteten Funktionen. Nimmt man also die Erstefunktion von dieser Größe, indem man $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ als Funktionen von x ansieht, wo y auch

al

als Funktion von x angenommen ist, so hat man

$$\alpha' + \alpha^{\beta}\beta' + \alpha'(\beta+\gamma') + \alpha''(\gamma+\delta') + \ldots.$$

und vergleicht man diese mit der vorgegebenen Funktion, so wird man haben

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = f'(y),$$
$$\beta + \gamma' = f'(y'), \quad \gamma + \delta' = f'(y'')$$

u. s. w.

Die erste Gleichung giebt α gleich einer willkührlichen beständigen Größe; die andern Gleichungen dienen β, γ, δ.... zu bestimmen; und da es leicht ist zu sehen daß die Anzahl dieser Größen nothwendig um eine Einheit geringer ist als die Anzahl der Gleichungen, so entstehet daraus eine Bedingungsgleichung, die so befriediget werden müßte daß das Maximum oder Minimum statt findet.

Zu diesem Ende, darf man diese Gleichungen nur unter dieser Form setzen

$$\beta' = f'(y), \quad \beta' + \gamma'' = [f'(y')]',$$
$$\gamma'' + \delta'' = [f'(y'')]''$$

u. s. w.

indem man die Erstenfunktionen von der Zweyten, die Zweytenfunktionen von der dritten macht, u. s. w. Zieht man endlich wechselsweise eine von der andern ab, so hat man

$$f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - [f'(y''')]''' + \ldots = 0,$$

wo die an den Parantheſen angebrachten Striche die Ersten, Zweytenfunktionen u. s. w. der in den Parentheſen enthaltenen Größen bezeichnen.

Diese Gleichung ist also dem Maximum und dem Minimum gemein, und dient den Werth von y in Funktion von x zu bestimmen; sie wird wie es leicht zu sehen ist, von einer doppelten Ordnung derjenigen von der Funktion

$f(x,$

$$f(x, y, y', y'' \ldots)$$

seyn.

172.

Die nemlichen Gleichungen

$\beta + \gamma' = f'(y')$, $\gamma + \delta' = f'(y'')$, u. ſ. w.

geben, durch ein ähnliches Verfahren

$\beta = f'(y') - [f'(y'')]' + [f'(y''')]'' -$ u. ſ. w.

$\gamma = f'(y'') - [f'(y''')]' +$ u. ſ. w.

$\delta = f'(y''') -$ u. ſ. w.

u. ſ. w.

Es ſey um abzukürzen

$$\Omega = \alpha\beta + \alpha'\gamma + \alpha''\delta + \ldots,$$

die urſprüngliche Gleichung von der Größe

$$\alpha f'(y) + \alpha' f'(y') + \ldots$$

wird ſeyn

$$\alpha + \Omega;$$

und da dieſe Funktion Null ſeyn ſoll, wenn $x = a$, und man durch A den Werth von Ω bezeichnet, welcher $x = a$ entſpricht, ſo wird man, weil a eine willkührliche beſtändige Größe iſt,

$$\alpha + A = 0$$

haben, und folglich

$$\alpha = -A.$$

Man wird alſo $\Omega - A$ für die urſprüngliche Funktion haben, welche Kraft des Maximum oder Minimum Null ſeyn ſoll, wenn $x = b$ iſt. Wenn man alſo noch durch B den Werth von Ω bezeichnet, der $x = b$ entſpricht, ſo wird man die Gleichung $B - A = 0$ haben, welche man vermittelſt der willkührlichen beſtändigen Größen befriediget, die in dem Ausdrucke von y, den man aus der oben gefundenen Gleichung ableitet

hineinkommen, und man übrigens auf den special-Bedingungen des Problems Rücksicht nimmt.

Also z. B. wenn der Werth von y für die Werthe a, h von x gegeben ist, ist, alsdann wird der Werth von ω in den beyden Größen A und B Null seyn; wenn ferner, der Werth von y' auch für dieselben Werthe von x gegeben wäre, so wären die Werthe von ω' auch in A und B Null; und so ferner.

Wenn die Größen ω, ω', ω'' . . ., zu der kleinst möglichsten Anzahl reducirt sind, sowohl in dem Ausdrucke für A als in dem von B, so setze man den Coeffizienten jeden von denjenigen Ausdrücken, welche bleiben Gleichung $B - A = o$ unabhängig von ü befriedigen gleich Null.

73.

Hat man auf diese Art die erste Bedingung befriedi- get, so bleibt nur noch die andere Bedingung zu erfüllen übrig, welche darin besteht, daß die ursprüngliche Funktion der Größe

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 f''(\,) + \omega\omega' f''(y, y') +$$
$$\tfrac{1}{2}\omega'^2 f''(y') + \text{u. s. w.}$$

zwischen den nemlichen Grenzen a und b von x immer positiv für das Maximum, und negativ für das Minimum, enthalten sey, indem man voraussetzt, daß der Werth von ω beliebig und so klein als man will sey.

Ich bemerke hier zuerst daß, obgleich die Funktionen

$$f''(y), f''(y, y') \ldots$$

wesentlich die Größen ω, ω' . . . (Nr. 170) enthalten, man durch ein dem in Nr. 164. ähnlichen Raisonnement beweisen kann, daß es für das Maximum oder Minimum hinlänglich ist, daß die in Redestehende Bedingung er-

erfüllt ſey, wenn man den Coeffizient λ gleich Null ſetzt, welches dieſe Größen aus den in Redeſtehenden Funktionen verſchwinden läßt, dergeſtalt, daß dieſe Funktionen alsdann nichts weiter ſind als die Zweytenfunktionen von der Funktion

$$f(x, y, y', y'' \ldots)$$

in Beziehung auf y allein genommen u. ſ. w, und folglich beſtimmte Werthe in x, y, y' . . . haben.

Dieſes feſtgeſetzt, wenn man ſich hier dasjenige erinnert was wir in dem erſten Theile (Nr. 48) bewieſen haben, ſo wird man daraus ſchließen, daß die Bedingungen, wovon die Rede iſt, befriediget wäre, wenn die v bene Größe

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 f''(y) + \omega\omega' f''(y, y') +$$

ſo beſchaffen wäre, daß ſie für alle Werthe von x, von x = a bis x = b, unabhängig von den Größen ω, ω', ω'' . . ., beſtändig poſitiv oder negativ bliebe; und da wir oben (Nr. 165) die allgemeinſten Bedingungen gegeben haben, damit eine Größe von beſagter Form nothwendig poſitiv oder negativ ſey, ſo bliebe nur noch übrig zu unterſuchen, ob dieſe Bedingungen in der Größe, wovon die Rede iſt ſtatt haben. Hätten ſie nicht ſtatt, oder hätten ſie nur in einem Theile von dieſer Größe ſtatt, ſo müßte man alsdann die urſprüngliche Gleichung des andern Theils ſuchen, und ſie gleich Null ſetzen, oder wenigſtens für das Minimum poſitiv, und negativ für das Maximum, unabhängig von den Größen ω, ω', ω'' . . .

174.

Um die Auflöſung dieſer Frage zu vereinfachen, ſo wollen wir zuerſt annehmen, daß die vorgegebene Größe nur die Quadrate und Producte aus den beyden Größen ω, ω'

halte; man wird leicht ſehen, daß dieſelbe Methode ſich auch auf zuſammengeſetztere Fälle ausdehnt; und wir werden durch dieſe Formel

$$\omega^2 M + \omega\omega' N + \omega'^2 P,$$

denjenigen Theil derſelben Größe vorſtellen für welchen die ſo eben genannten Bedingungen ſtatt finden. Es kömmt alſo darauf an, die urſprüngliche Funktion von der Größe

$$\omega^2[\tfrac{1}{2}f''(y) - M] + \omega\omega'[f'(y, y') - N] + \omega'^2[\tfrac{1}{2}f''(y') - P],$$

zu finden, und es iſt leicht ſich im voraus zu verſichern, daß mit daß die Größe ω unbeſtimmt bleibe, dieſe Funktion nur von der Form

$$\mu + \omega^2,$$

ſeyn könnte. Nimmt man alſo die Erſtefunktion und vergleicht man Glied für Glied mit der Vorhergehenden, ſo wird man haben

$$\mu' = 0,$$
$$\nu' = \tfrac{1}{2}f''(y) - M,$$
$$2\nu = f''(y,y') - N, \text{ und}$$
$$0 = \tfrac{1}{2}f''(y') - P.$$

Die erſte dieſer Gleichungen giebt μ gleich einer willkührlichen beſtändigen Größe, und die drey andern werden dazu dienen, die Werthe von M, N, P, zu beſtimmen, welche ſeyn werden

$$M = \tfrac{1}{2}f''(y) - \nu,$$
$$N = f''(y,y') - 2\nu,$$
$$P = \tfrac{1}{2}f''(y'),$$

und dieſe Werthe müſſen die aus den Formeln von Nr. 165 entſpringende Bedingungen befriedigen. Nimmt man, dem zufolge die Größen ω' und ω an die Stelle der Größen p und q, und folglich P, N, M an die Stelle von A, B, C, und macht

T=

$$T = M - \frac{N^2}{4P},$$

wird man für das Minimum die zwey Bedingnngen

$$P > o, \text{ und } T > o$$

aben, und für das Maximum die entgegengeſetzte Bedingungen

$$P < o, \text{ und } T < o;$$

der welches einerley eine der beyden Größen P, T gleich Null, ſowohl für das Minimum als für das Maximum, und dieſe Bedingungen müßten für alle Werthe von x, von $x = a$ bis $x = b$ ſtatt haben, damit die Größe

$$\omega'^2 P' + \omega\omega' N + \omega^2 M$$

im erſten Falle zwiſchen denſelben Grenzen beſtändig poſitiv, und im zweyten Falle beſtändig negativ ſeyn. Da die Größe P gegeben iſt, ſo wird ſie auf der Stelle das Maximum oder Minimum anzeigen; Aber man wird davon nur durch die andere Bedingung

$$T > \text{oder} < o, \text{ oder welches einerley} = o$$

für beyde Fälle verſichert ſeyn.

Ferner, und dieſes iſt hier eine ſehr weſentliche Bedingung, müſſen die Größen M, N, P nicht zwiſchen denſelben Grenzen unendlich werden, damit man verſichert ſeyn kann, daß die urſprüngliche Funktion der in Redeſtehende Größe, nothwendig poſitiv oder negativ ſey, nach dem Theorem der citirten Nr. 48. Denn da dieſes Theorem auf die Entwickelung der Funktionen in Reihen gegründet iſt, ſo iſt es nothwendig den der Form dieſer Entwickelung anhängenden Ausnahmen unterworfen, welche wir in den Nr. 42 und 20 unterſucht haben; ſie könnte alſo nicht anwendbar ſeyn, wenn die von der urſprünglichen Funktion abgeleiteten Funktionen unendlich werden, weil alsdann die Entwickelung nicht mehr dieſelbe Form hätte; dieſes geſchiehet noth-

und es sey (A) der Werth von (Ω), wel...
wird man

$$\mu = -(A)$$

, die ursprüngliche Funktion, wovon die Rede i...
also

$$(\Omega) - (A)$$

welche für x = b Null, oder positiv für das Mi...
n und negativ für das Maximum seyn sollte.
also (B) der Werth von (Ω), wenn x = b, so
man

$$B - (A) > \text{oder} < o$$

s Minimum oder das Maximum haben, oder
ür beyde Fälle, unabhängig von dem Werthe von
per unbestimmt bleiben soll. Also, wenn der Werth
für die Werthe von a und b von x gegeben sind,
alsdann der entsprechende Werth von ω Null ist,
man

$$(A) = o, \quad (B) = o$$

und die vorhergehende Bedingung wird erfüllt
sowohl für das Maximum als für das Mini-
Wenn die Werthe von y nicht gegeben sind, so
nan alsdann für das Minimum

$$\omega = \text{oder} > o \text{ wenn } x = b,$$
$$\omega = \text{oder} < o \text{ wenn } x = a$$

haben; und für das Maximum im ersten Falle

$$\omega = o \text{ oder} < o,$$

zweyten Falle

$$\omega = o \text{ oder} > o.$$

as der Werth der Größe ω anbetrift, so hängt
bloß von der Bedingung

, wenn die urſprüngliche Funktion vom Poſitiven ...egativen durchs Unendliche geht, wie die Tangenten der Winkel. Alsdann wird für den dieſem Durchgange entſprechenden Werth von x, die Entwickelung der Funktion von $x + i$ ihr erſtes Glied die Form Ai^m haben, wo m eine ungerade negative Zahl iſt, und die Erſtefunktion, ſo wie alle folgende, werden unendlich ſeyn (Nr. 41).

In dieſem Falle könnte die urſprüngliche Funktion das Zeichen ändern, obgleich ihre Erſtefunktion immer daſſelbe Zeichen beybehält. Um davon ein ſehr einfaches Beyſpiel zu ſehen, ſo darf man nur die Funktion

$$\frac{x}{1-x}$$

betrachten, welche $= 1$ iſt, wenn $x = \frac{1}{2}$, und $= -1$ wenn $x = 2$; demohngeachtet iſt ihre Erſtefunktion

$$\frac{1}{(1-x)^2}$$

immer poſitiv ſo lange als x ein reellen Werth hat. Hier werden die urſprüngliche Funktion und alle ihre abgeleiteten Funktionen unendlich wenn $x = 1$. Dieſes iſt eine zu der in Nr. 48 vorgetragenen Theorie zuzuſetzende Modification.

175.

Hat man dieſe Bedingungen befriediget, ſo wird man die urſprüngliche Funktion

$$\mu + \omega^2,$$

haben, in welcher μ eine willkührliche beſtändige Größe iſt die man ſo beſtimmt, daß die urſprüngliche Funktion Null ſey, wenn $x = a$ iſt. Wir wollen

$$\omega^2 = (\Omega)$$

ſetzen

ſetzen, und es ſey (A) der Werth von (Ω), wel
iſt, ſo wird man

$$\mu = -(A)$$

haben, die urſprüngliche Funktion, wovon die Rede i
wird alſo

$$(\Omega) - (A)$$

ſeyn, welche für $x = b$ Null, oder poſitiv für das Minimum und negativ für das Maximum ſeyn ſollte. Es ſey alſo (B) der Werth von (Ω), wenn $x = b$, ſo müßte man

$$B - (A) > \text{oder} < o$$

für das Minimum oder das Maximum haben, oder $= o$ für beyde Fälle, unabhängig von dem Werthe von ω welcher unbeſtimmt bleiben ſoll. Alſo, wenn der Werth von y für die Werthe von a und b von x gegeben ſind, und da alsdann der entſprechende Werth von ω Null iſt, ſo wird man

$$(A) = o, \quad (B) = o$$

haben, und die vorhergehende Bedingung wird erfüllt ſeyn, ſowohl für das Maximum als für das Minimum. Wenn die Werthe von y nicht gegeben ſind, ſo müßte man alsdann für das Minimum

$$\omega = \text{oder} > o \text{ wenn } x = b,$$

und $\omega = \text{oder} < o$ wenn $x = a$

wäre, haben; und für das Maximum im erſten Falle

$$\omega = o \text{ oder} < o,$$

und im zweyten Falle,

$$\omega = o \text{ oder} > o.$$

176.

Was der Werth der Größe ω anbetrift, ſo hängt dieſer bloß von der Bedingung

$$T \text{ oder } M - \frac{N^2}{4P} > o,$$

für das Minimum und $< o$ für das Maximum ab. Diese Bedingung wird also, wenn man die Werthe von M, N, P substituirt:

$$\tfrac{1}{2} f''(y) - \nu' - \frac{[f''(y, y') - 2\nu]^2}{2 f''(y')} > \text{ oder } < o,$$

seyn, und man nimmt für eine beliebige Funktion von x die dort befriedigte

Das Einfachste wäre, diese Größe gleich Null anzunehmen (Nr. 174), dieses würde die Gleichung

$$4 M P - N^2 = o$$

geben; nemlich

$$f''(y')\,[f''(y) - 2\nu'] - [f''(y, y') - 2\nu]^2 = o,$$

durch welche man den Werth von v bestimmen könnte; und das Maximum oder Minimum würde bloß von dem Zeichen der Größe P oder $\frac{1}{2} f''(y')$ abhangen.

Man hätte auf diese Art dasselbe Resultat als die in den Memoiren der Akademie der Wissenschaften von Jahr 1786 vorgetragene Methode um in den Variationscalcul der Maxima und Minima zu unterscheiden, giebt. Aber, nachdem was wir eben gesagt haben, müßte man, der Genauigkeit dieses Resultats wegen, sich auch versichern können das der Werth von ν für einen zwischen den gegebenen Werthen a und b liegenden Werth von x nicht unendlich werde; welches am öfterſten unmöglich seyn wird, wegen der Unmöglichkeit die ursprüngliche Gleichung in ν und x zu finden. Ohne diese Bedingung wird man, obgleich die Größe

$$\omega^2 M + \omega\,\omega' N + \omega'^2 P$$

alsdann von der Form

P(ω'

$$P(\alpha' + \frac{\alpha N}{2})^{\alpha}$$

wird, und sie folglich immer positiv oder negativ ist, je nachdem es der Werth von P seyn wird, niemals von dem positiven oder negativen Zustande ihrer ursprünglichen Funktion gewiß seyn.

177.

Um davon ein Beyspiel zu geben, welches zu gleicher Zeit als eine Anwendung der eben vorgetragenen Methode dienen kann. Wir wollen annehmen daß die Funktion

$$f(x, y, y' \ldots.)$$

wovon die ursprüngliche Funktion ein Maximum oder ein Minimum seyn soll,

$$y'^2 + 2my'y + ny^2$$

sey, indem man die Ersten und Zweytenfunktionen nimmt, so wird man haben

$$f'(y) = 2(my' + ny),$$
$$f'(y') = 2(y' + my),$$
$$f''(y) = 2n,$$
$$f''(y, y') = 2m,$$
$$f''(y') = 2.$$

Setzt man diese Werthe in der allgemeinen Gleichung von Nr. 171, welche sich in diesen Falle, auf

$$f'(y) - [f'(y')]' = 0$$

reducirt, so wird man haben

$$2(my' + ny) - 2(y'' + my') = 0;$$

nemlich

$$y'' - ny = 0,$$

für die Gleichung des Maximum oder Minimum.

Dieſe Gleichung kann nach der Methode von Nr 67 behandelt worden und giebt ſogleich

$$y = ge^{x\sqrt{n}} + he^{-x\sqrt{n}},$$

wo g und h zwey willkührliche beſtändige Größen ſind; wäre n eine negative Größe $= -k^2$, ſo würde man haben, indem man andere willkührliche beſtändige Größen g und h nimmt:

$$y = g \sin.(kx + h),$$

Mehrerer Einfachheit wegen wollen wir annehmen, daß die Werthe von y für die beyden äußerſten Werthe a und b von x gegeben ſind, die Größen A und B werden von ſelbſt Null, und die Gleichung B — A wird befriediget ſeyn (Nr. 172). Man wird alſo die beſtändigen Größen a und b dergeſtalt beſtimmen daß für $x=a$ und $= b$, y die gegebene Werthe haben.

Jetzt haben wir, durch die Formeln von Nr. 174,

$$M = n - \nu',$$
$$N = 2(m - \nu),$$
$$P = 1;$$

woraus man ſieht daß, weil P > als o iſt, ſo kann nur das Minimum ſtatt finden. Aber dieſe Bedingung iſt nicht hinlänglich um ſich vom Daſeyn des Minimum zu verſi- man muß ferner

$$M - \frac{N^2}{4P} > 0$$

haben; nemlich

$$n - \nu^2 - (m - \nu)^2 > 0,$$

indem man für ν eine Größe nimmt, welche nicht zwiſchen den Grenzen a und b von x unendlich wird. Wenn der Werth von n poſitiv iſt, ſo iſt klar, daß man dieſe Bedingung befriedigen kann, indem man $\nu = m$ macht. Man Man wäre alſo in dieſem Falle von dem Daſeyn des Minimum

nimum verſichert, weil die beyden Größen (A) und (B) übrigens Null durch die Hypotheſe, daß die Werthe von y für $x = a$ und $x = b$ gegeben ſind (Nr. 175).

Aber, wenn n negativ und $= -k^2$ iſt, ſo wird man alsdann die Bedingung $-\nu' > k^2 + (m - \nu)^2$ haben, und es iſt nicht leicht ein befriedigender Werth von ν zu finden, ſelbſt ſich nicht einmal zu verſichern, daß man ihn finden könnte.

Wenn man, nach der Methode, von welcher wir in der letzten Nummer geſprochen haben,

$$-\nu' = k^2 + (m - \nu)^2$$

macht, indem man

$$m - \nu = k\varrho.$$

annimmt, ſo hätte man

$$k\varrho' = 1 + \varrho^2;$$

nemlich,

$$\frac{\varrho'}{1+\varrho^2} = \frac{1}{k},$$

und nimmt man die urſprünglichen Funktionen von beyden Seiten,

$$\text{Winkel der tg. } \varrho = \frac{x}{k} + d;$$

nemlich,

$$\varrho = \text{tg. } \left(\frac{x}{h} + d\right),$$

wo d eine willkührliche beſtändige Größe iſt. Dieſer Werth wird unendlich, wenn

$$\frac{x}{h} + d =$$

einem rechten Winkel wird, oder gleich drey Rechte, oder u. ſ. w. Man wäre alſo von der Exiſtenz des Minimums nicht

nicht verſichert, wenn die Differenz b — a größer wäre als der Werth von k in zwey rechte Winkel multiplicirt.

In der That damit das Minimum allgemein ſtatt findet, ſo muß (Nr. 173) die urſprüngliche Funktion der Größe

$$n\omega^2 + 2m\omega\omega' + \omega'^2$$

poſitiv ſeyn, was auch immer der Werth von ω ſeyn könnte. Nehmen wir

$$\omega = i \sin. x$$

an, ſo wird dieſe Größe

$$i^2(n \sin. x^2 + 2m \sin. x . \cos. x + \cos. x^2) =$$

$$i^2\left(\frac{1+n}{2} + \frac{1-n}{2} . \cos. 2x + m . \sin. 2x\right),$$

davon die urſprüngliche Funktion

$$i^2\left(\frac{1+n}{2}x + \frac{1-n}{4} \sin. 2x - \frac{m}{2} \cos. 2x\right) + c$$

iſt, wo c die beſtändige Größe iſt, welche man ſo beſtimmt, daß die urſprüngliche Funktion für $x = a$ Null iſt, nachher macht man $x = b$. Wenn man daher $a = 0$ und b gleich zween Rechten annimmt, damit der Werth von ω nach der Hypotheſe für $x = a$ und $= b$ Null ſey, ſo wird der vollſtändige Werth von der in Redeſtehenden urſprünglichen Funktion ſeyn

$$i^2(1 + n)D,$$

wo D den rechten Winkel vorſtellt; und es iſt ſichtbar, daß dieſer Werth negativ werden könnte, wenn $n = -k^2$, indem man $k > 1$ nimmt.

178.

Wir wollen jetzt annehmen, daß die Größe, welche die zwey Dimenſionen von ω, ω' enthält, auch ω'' enthalte, und ſie von der Form (Nr. 173) ſey

$\frac{1}{2}\omega^2$

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 f''(y) + \omega\omega' f''(y, y') +$$
$$\tfrac{1}{2}\omega'^2 f''(y') + \omega\omega'' f''(y, y''') +$$
$$\omega'\omega'' f''(y', y'') + \tfrac{1}{2}\omega''^2 f''(y'');$$

r nehmen

$$\omega^2 M + \omega\omega' N + \omega'^2 P + \omega\omega'' Q + \omega'\omega'' R + \omega''^2 S$$

ır denjenigen Theil dieſer Größe, welcher den Bedin-
ungen der Formel von Nr. 165 unterworfen ſeyn ſoll,
nd es muß die Differenz dieſer zwey Größen einer von
er Größe ω unabhängigen urſprünglichen Funktion fähig
ıyn

$$\mu + \omega\nu + \omega\omega'\pi + \omega'^2\varrho,$$

nd man wird durch Vergleichung der Glieder, die Glei-
ungen

$$\mu' = 0,$$
$$\nu' = \tfrac{1}{2} f''(y) - M,$$
$$2\nu + \pi' = f''(y, y') - N,$$
$$\pi + \varrho' = \tfrac{1}{2} f''(y') - P,$$
$$\pi = f''(y, y'') - Q,$$
$$2\varrho = f''(y', y'') - R,$$
$$\sigma = \tfrac{1}{2} f''(y'') - S$$

nden; welche μ gleich einer willkührl. beſtändigen
röße geben, nachher

$$M = \tfrac{1}{2} f''(y) - \nu',$$
$$N = f''(y, y') - 2\nu - \pi',$$
$$P = \tfrac{1}{2} f''(y') - \pi - \varrho',$$
$$Q = f''(y, y'') - \pi,$$
$$R = f''(y', y'') - 2\varrho,$$
$$S = \tfrac{1}{2} f''(y'');$$

o die drey Größeu ν, π, ϱ unbeſtimmt bleiben; man
uß ſie aber ſo nehmen, daß ſie die Bedingungen, wel-
en die Größen M, N, P, . . . unterworfen ſeyn ſollen,
friedigen, und welche man aus den Formeln von

Nr.

Nr. 165 ableiten kann, wenn man die Größen α'', α', α an der Stelle der Größen p, q, r setzt. Also, wenn man

$$T = P - \frac{R^2}{4S},$$

$$V = N - \frac{QR}{2S},$$

$$X = M - \frac{Q^2}{4S},$$

und $Y = X - \frac{V^2}{4T}$

macht, so sind die Bedingungen für das Minimum

$$S > 0,\ T > 0 \text{ und } Y > 0,$$

und für das Maximum

$$S < 0,\ T < 0,\ V < 0;$$

und diese Bedingungen müssen für alle Werthe von x, von $x = a$ bis $x = b$ statt finden,

Der Werth von S wird das Maximum oder Minimum anzeigen; man kann aber nur durch das mitzutreffen der beyden andern Bedingungen davon versichert seyn. Ferner, müssen die Größen M, N, P, Q, R, S aus oben Nr. 174 dargestellten Gründen nicht zwischen den nemlichen Grenzen unendlich werden.

Endlich muß indem man

$$(\Omega) = \alpha^2, + \alpha\alpha' + \alpha'^2,$$

annimmt, und (A) und (B) für die Werthe von (Ω), welche $x = a$ und $x = b$ entsprechen nimmt, die Größe (B) — (A) sey, unabhängig von den Werthen von α und von α' für das Minimum positiv und für das Maximum negativ, (Nr. 175).

Man befolgt dasselbe Verfahren für zusammengesetztere Funktionen.

179.

Wenn die Werthe von y, y′ u. ſ. w. nicht für die erthe a und b von x gegeben wären, ſondern nur eine rch die Natur des Problems beſtehende Relation zwi- ıen dieſen Größen da wäre, welche durch die Gleichung

$$\phi(x, y, y' \ldots) = 0$$

ırgeſtellt iſt; alsdann darf man nur den Principien von r. 267 zufolge, zu der Funktion, welche poſitiv für das Minimum und negativ für das Maximum ſeyn ſoll, ie Größe

$$\omega\phi'(y) + \omega'\phi'(y') + (\omega''\phi'(y'') + \ldots$$
$$+ \tfrac{1}{2}\omega^2\phi''(y) + \omega\omega'\phi''(y,y') + \tfrac{1}{2}\omega'^2\phi''(y') + \ldots$$

ı einem unbeſtimmten Coeffizient r multiplicirt, hinzuſe- en, und nachgehends die Größen ω, ω' als unabhängig thandeln. Alſo, wenn die in Redeſtehenden Bedingun- en für den Werth von $x = a$ ſtatt finden ſoll, ſo ſetzt ıan zu den zwey Größen A und (A) (Nr. 172, 175) die ıröße

$$r[\omega\phi'(y) + \omega'\phi'(y') + \ldots]$$

und $r[\frac{1}{2}\omega^2\phi''(y\ \omega\omega'\phi''(y,y') + \ldots]$

inzu, welche beyde auf den nemlichen Werth von x be- gen ſind; und ſollte dieſe Bedingung für den Werth ın $x = b$ ſtatt haben, ſo ſetzt man zu den Werthen von und von (B) die nemlichen auf $x = b$ ſtatt haben, ſo ıt man zu den Werthen von B und von (B) die nemli- en auf $x = b$ bezogenen Größen hinzu.

Man befolgt für jede dieſer gegebenen Bedingungen, ıenn mehrere da ſind, daſſelbe Verfahren.

180.

Die vorgegebene Funktion, von welcher die urſprüngliche Funktion ein Maximum oder ein Minimum ſeyn ſoll, könnte, auſſer den veränderlichen Größen x und y noch eine dritte veränderliche Größe z unabhängig von den beyden andern enthalten; alsdann verfährt man in Rückſicht dieſer veränderlichen Größe, wie man in Rückſicht auf y verfahren hat. Alſo, indem man die vorgegebene Funktion durch

$$f(x, y, y', y'' \ldots. z, z', z'' \ldots.)$$

anzeigt, ſo ſubſtituirt man darinn auf einmal die Größen

$$y + \omega \text{ und } z + \zeta$$

an die Stelle von y und z, und es muß, nach der Entwickelung, die urſprüngliche Funktion von dem Theile welcher nur die erſten Dimenſionen von $\omega, \omega', \omega'', \ldots., \zeta, \zeta', \zeta'', \ldots.$ Null ſeyn, und die urſprüngliche Funktion von den Theile welcher die zweyte Dimenſionen von dieſen nemlichen Größen enthalten wird, muß unabhängig von den Größen ω und ζ poſitiv für das Minimum, und negativ für das Maximum ſeyn (Nr. 170)

Hieraus hat man, durch eine der in Nr. 171 ähnlichen Analyſis, und indem man für die Erſtenfunktionen in Beziehung auf $z, z', z'' \ldots.$ eine ähnliche Beziehung als die welche wir in Beziehung auf $y, y', y'' \ldots.$ angewendet haben, beybehält, folgende zwey Gleichungen

$$f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - \text{u. ſ. w.} = 0$$
$$f'(z) - [f'(z')]' + [f'(z'')]'' - \text{u. ſ. w.} = 0,$$

welche dienen die Größen y und z in Funktionen von x zu beſtimmen. Nachgehends muß man in Beziehung auf die Größen z und ζ ähnliche Bedingungen als man in

Be

Beziehung auf y und z gefunden hat befriedigen; dieses ist ein Detail der uns zu weit führen würde, und den der Leser ergänzen kann.

Man sieht hieraus daß, wenn eine vierte veränderliche Größe u da wäre, so hätte man in Beziehung dieser veränderlichen Größe, seine ähnliche Gleichung, als diejenigen die den veränderlichen Größen y und z entsprechen; und so ferner.

181.

Wenn aber in der Funktion

$$f(x, y, y' \ldots, z, z' \ldots)$$

die Größe z von den Größen x und y auf irgend eine beliebige durch die Gleichung

$$\phi(x, y, y' \ldots, z, z' \ldots) = 0$$

gegebene Art abhängt. Alsdann, setzt man, nach denselben Principien von Nr. 167 bloß die Funktion

$$\phi(x, y, y' \ldots, z, z' \ldots),$$

durch einen unbestimmten und veränderlichen Coefficienten Δ multiplicirt zu der vorgegebenen Funktion

$$f(x, y, y' \ldots, z, z' \ldots)$$

hinzu, und man suchte durch die vorgetragenen Methoden, das Maximum oder Minimum von der ursprünglichen Funktion dieser zusammen gesetzten Funktion, indem man die Größen y und z als unabhängig betrachtet. Man wird also zu erst für das Maximum und Minimum die zwey Gleichungen

$$f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - \ldots + \Delta\,\phi'(y) - [\Delta\phi'(y)]' + [\Delta\phi'(y'')]'' - \ldots = 0;$$

$$f'(z) - [f'(z')]' + [f'(z'')]'' - \ldots + \Delta\,\phi'(z) - [\Delta\phi'(z')]' + [\Delta\phi'(z'')]'' - \ldots = 0;$$

finden; wenn man hieraus die Größe Δ eliminirt, ſo wird man eine Gleichung haben, welche mit der gegebenen Gleichung

$$\varphi(x, y, y' \ldots\ z, z' \ldots) = 0$$

combinirt, die Werthe von x, und z in Funktionen x zu beſtimmen dient.

Endlich, wenn die urſprüngliche Funktion der Funktion $f(x, y, y', \ldots)$ nur ein Maximum oder ein Minimum ſeyn ſollte in ſo fern die urſprüngliche Funktion einer andern Funktion

$$\varphi(x, y, y' \ldots)$$

zwiſchen den nemlichen Werthen a und b von x gegeben wäre, ſo darf man nur das Maximum oder Minimum von der Summe dieſer zwey urſprünglichen Funktionen ſuchen, nachdem man die zweyte durch einen unbeſtimmten von x unabhängigen Coefficienten multiplicirt hat, d. h. von der urſprünglichen Funktion von

$$f(x, y, y' \ldots) + \Delta\, \varphi(x, y, y' \ldots),$$

indem man Δ als eine beſtändige Größe anſieht. Auf dieſe Art, hat man zuerſt, für das Maximum und Minimum, die Gleichung

$$f'(\quad) + [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - \ldots + \Delta\, \varphi'(y) - [\varphi'(y')]' + \Delta\, [\varphi'(y'')]'' - \ldots = 0,$$

und hier wird die beſtändige Größe Δ dergeſtalt beſtimmen daß die urſprüngliche Funktion von

$$\varphi(x, y, y', \ldots),$$

von $x = a$ bis $x = b$ genommen gegeben ſey; und ſo fern u.

182.

Die zuerſt von den beyden Brüdern Bernoulli aufgegebene und aufgelöſten Probleme von der brachy-

ſtochro-

stochrone und der isoperimetrischen Linien, haben die Bahn geöffnet um diese neue Art von Fragen des Maximum und Minimum zu behandeln. Man hat nachher successive allgemeinere und einfachere Methoden gefunden, und man ist endlich zu den Variationscalcul gekommen, der über diesen Gegenstand nichts mehr scheint übrig zu lassen. Da die oben gefundenen Gleichungen (Nr. 171, 180) bis auf der Bezeichnung die nemlichen sind als die welche aus dieser Rechnung hervorgehen, so könnten wir es jenübrigen sie auf Beyspiele anzuwenden; aber es wird nicht unnütz seyn den Gebrauch dieser Regeln durch ein bekanntes Beyspiel zu zeigen, um die Maxima von den Minima zu unterscheiden, und uns von ihrem Daseyn zu versichern.

Wir wollen daher das Problem von der brachystochrone, oder der Linie des geschwindesten Falls wegen ihrer Celebritet wiederum vornehmen; es besteht bekanntermaßen darin, diejenige Curve zu finden, längst welcher ein schweter Körper in der kürzesten Zeit von einem gegebenen Punkte auf einem andern gegebenen Punkte fallen würde, welcher letztere in einer verschiedenen Vertikal liegt. Da, nach den Principien der Mechanik, die Erste[illegible] von der Zeit gleich ist der Erstenfunktion des Raums di[illegible] durch die Geschwindigkeit, und bey Körpern, welche [illegible] ihre Schwere fallen, die Geschwindigkeit immer der Quadratwurzel aus der Höhe von der sie herunter gefallen [illegible] dacht sind proportional ist; so wird man, wenn man [illegible] durch den Körper beschriebene Curve auf die drey rechtwinklichte Coordinaten x, y, z bezieht, und die Abscissen x vertikal nimmt, für den allgemeinen Ausdruck der Geschwindigkeit $\sqrt{(h+x)}$ haben, und $\sqrt{(1+y^{m}+z^{n})}$

für die Erſtenfunktion des Bogens der Curve (no. 144); alſo wird

$$\frac{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}{\sqrt{(h+x)}}$$

die Erſtefunktion der Zeit ſeyn, wovon die urſprüngliche Funktion ein Minimum ſeyn muß. Man hat daher

$$f(x, y, y' \ldots z, z' \ldots) = \frac{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}{\sqrt{(h+x)}};$$

alſo, wenn man die Erſtenfunktionen nimmt

$$f'(y)=0, f'(y') = \frac{y'}{\sqrt{(h+x)}\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}},$$

$$f'(z)=0, f'(z') = \frac{z'}{\sqrt{(h+)}\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}},$$

und man wird (no. 180) die beyden Gleichungen haben

$$\left[\frac{y'}{\sqrt{h+x)}\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}\right]' = 0, \text{ und}$$

$$\left[\frac{z'}{\sqrt{(h+x)}\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}\right]' = 0,$$

welche ſogleich folgende zwey von der erſten Ordnung geben, wo m und n willkührliche beſtändige Größen ſind

$$\frac{y'}{\sqrt{(h+x)}\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}} = m$$

$$\frac{z'}{\sqrt{(h+x)}\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}} = n.$$

Wenn man dieſe beyden Gleichungen eine durch die andere dividirt, ſo hat man

$$\frac{y'}{z'} = \frac{m}{n};$$

nehmlich

$$z' = \frac{ny'}{m},$$

und

und wenn man die urſprüngliche Gleichung nimmt

$$z = \frac{ny}{m} + l,$$

wo l eine neue willkührliche beſtändige Größe iſt. Dieſe Gleichung, welche zu einer Vertical-Ebene gehört, weil ſich die ſenkrechte Abſciſſe nicht darin befindet, zeigt daß die geſuchte Curve ganz in dieſer Ebene fällt; alſo wenn man die Axe der y in derſelben Ebene nimmt, ſo könnte man für $z = o$ ſetzen, indem man $n = o$ machte; und man würde für die Curve dieſe einzige Gleichung zwiſchen denſelben Coordinaten x und y haben:

$$\frac{y'}{\sqrt{(h+x)}\sqrt{(1+y'^2)}} = m$$

woraus man zieht

$$y' = \frac{m\sqrt{(h+x)}}{\sqrt{[1+m^2(h+x)]}},$$

welches die Gleichnng von der Cycloide iſt, wo die Abciſſen x auf den Diameter des Erzeugungskreiſes und die Ordinaten ſenkrecht auf dieſem Diameter genommen ſind. Weil man vorausſetzt, daß die beyden äußerſten Punkte der Curve gegeben ſind, ſo ſind die Größen α und ζ welche dieſen Punkten entſprechen Null, und die Werthe der Größen A und B ſind auch Null, wenn man α und h für die Werthe von x welche dieſen Punkten entſprechen, nimmt; alſo iſt die Bedingung A — B erfüllt.

Machte man in Beziehung dieſer Punkte andere Hypotheſen, ſo fände man andere Reſultate, wir werden uns hierbey nicht aufhalten, weil dieſe verſchiedenen Fragen ſchon bereits durch die Grundſätze des Variations-calcul unterſucht und aufgelößt ſind. Aber man muß ferner ſehen, was diejenigen Glieder geben, wo die

Größen ω und ζ bis zur zweyten Dimenſion ſteigen, und deren urſprüngliche Funktion poſitiv ſeyn ſoll, damit das Minimum würklich ſtatt habe.

Weil die vorgegebene Funktion $f(x, y, y', \ldots z, z', \ldots)$ im gegenwärtigen Fall, nicht die veränderlichen Größen y und z enthält, ſondern nur ihre Erſtefunktionen y' und z'; ſo iſt es leicht einzuſehen, daß die in redeſtehenden Glieder bloß von der Form

$$\tfrac{1}{2}\omega'^2 f''(y') + \omega'\zeta' f''(y', z') + \tfrac{1}{2}\zeta'^2 f''(z');$$

ſeyn werden; und man findet, wenn man die die Erſten Funktionen der Größen

$f'(y')$, und $f'(z')$ nimmt

in Beziehung auf y' und z',

$$f''(y') = \frac{1 + z'^2}{\sqrt{(h+x)}\,(1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$f''(y', z') = -\frac{y'z'}{\sqrt{(h+x)}\,(1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$f''(z') = \frac{1 + y'^2}{\sqrt{(h+x)}\,(1 + y'^2 + z')^{\frac{3}{2}}}$$

ſo daß die in redeſtehende Größe wird

$$\frac{\omega'^2(1 + z'^2) - 2\omega'\zeta' y'z' + \zeta'^2(1 + y'^2)}{\sqrt{(h+x)}\,(1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

welche man unter dieſe Form bringen kann

$$\frac{\omega'^2 + \zeta'^2 + (\omega' z' - \zeta' y')^2}{\sqrt{(h+x)}\,(1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

woraus man ſieht, daß dieſe Größe von ſelbſt die Eigenſchaft hat, immer nothwendig poſitiv zu ſeyn, welches auch die Werthe von ω und ζ ſeyn mögen. Und, da ſie überdem niemals unendlich werden kann, ſo lange als y' und z' unendlich ſind, ſo folgt hieraus, daß das

Mini-

Minimum nothwendig bey der Cycloide statt haben müsse.

Wir wollen uns nicht mit andern Details dieses Problems beschäftigen, welches verschiedene Fälle zu untersuchen darbietet, nach den Bedingungen welche man in Absicht auf den ersten und letzten Punkt der Curve machen kann, und in Hinsicht auf die Curve selbst, die man sich auf eine gegebene Oberfläche gezeichnet denken kann. Die Auflösung von allen diesen Fällen kann man leicht aus den oben festgesetzten Principien herleiten.

183.

Die Analysis welche wir angewendet haben, um die Maxima und Minima der ursprünglichen Funktionen zu finden, führt uns zu einer wichtigen Bemerkung. Wir haben (no. 171) gefunden, daß wenn die Größe

$$\omega f'(y) + \omega' f'(y') + \omega'' f''(y'') + \text{u. s. w.}$$

eine ursprüngliche Funktion haben soll, welches auch immer der Werth von ω sey, sie der Gleichung

$$f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - \text{u. s. w.} = 0$$

ein Genüge leisten müsse.

Wenn also, diese Größe selbst die Erstefunktion einer Funktion von

$$x, y, y', \text{u. s. w. } \omega, \omega', \text{u. s. w.}$$

wäre, so würde die vorhergehende Gleichung selbst statt haben und daher identisch seyn.

Denn man sieht aus no. 170, daß die in redestehende Größe nichts anders ist, als derjenige Theil von der Entwicklung der Funktion

$$f(x, y + \omega, y' + \omega', y'' + \omega'' \ldots),$$

welcher nur die ersten Dimensionen von $\omega, \omega', \omega''$, u. s. w. enthält; und ich will beweisen, daß diese Größe

nothwendig eine Erstefunktion seyn müsse, wenn die Funktion

$$f(x, y, y' y'' \ldots$$

selbst eine Erstefunktion einer Funktion von x, y, y' . . . ist.

In der That, wenn diese Funktion eine Erstefunktion ist, welches auch der Werth von y in x sey, so wird sie es auch noch seyn, wenn man y + α statt y setzt, was auch immer der Werth von α sey; also wird auch nothwendig

$$f(x, y + \alpha, y' + \alpha' \ldots)$$

eine Erstfunktion seyn, wenn man für α irgend eine Funktion von x nimmt. Laßt uns annehmen, daß diese Funktion schon, nach den Potenzen und Produkten von α, α', α'', u. s. w. entwickelt sey, und uns respective durch P, Q, R u. s. w. die Theile von dieser Entwicklung bezeichnen, welche die ersten Dimensionen, die zweyten Dimensionen, die dritten u. s. w. von derselben Größe enthalten werden, so wird man haben

$$f(x, y + \alpha, y' + \alpha', y'' + \alpha'' \ldots) = f(x, y, y', y'' \ldots) + P + Q + R \text{ u. s. w.}$$

Also muß die Größe P + Q + R u. s. w. die Erstenfunktion einer Fnnktion von x, y, u. s. w. und von α, α', α'', u. s. w. seyn; es ist leicht einzusehen, daß jede der Größen P, Q, R, u. s. w. für sich besonders eine Erstefunction seyn müsse, weil es wegen der Natur der abgeleiteten Funktionen unmöglich ist, da diese Größen verschiedene Dimensionen von den unbestimmten α und seinen abgeleiteten Funktionen α', α'', in sich halten, daß die ursprünglichen Funktionen von P, Q, R, u. s. w. von einander abhängen können. Denn man hat

$$P = \alpha f'(x) + \alpha' f'(y') + \alpha'' f'(y'') + \text{u. s. w. (no. 170)};$$

daher

daher wird diese Größe selbst eine Erstefunktio seyn. Also, wenn endlich die Funktion

$$f(x, y, y', y'' \ldots$$

eine Erstefunktion ist, so muß die Gleichung

$$f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - \\ - [f'(y''')]''' + \text{u. s. w.} = 0$$

nothwendig identisch seyn.

Umgekehrt kann man zeigen, daß wenn diese Gleichung identisch ist, die Funktion

$$f(x, y, y', y'' \ldots)$$

nothwendig eine Erstefunktion seyn müsse; denn wir haben gesehen, daß wenn die Gleichung wahr ist, alsdann die Größe P eine Erstefunktion ist, welches auch die Werthe von y und von ω seyn mögen; sie wird also eine Erstefunktion seyn, wenn man $y + \omega$ an der Stelle von y setzt. Wir wollen annehmen, daß aus der Größe P durch diese Substitution, und durch die Entwicklung nach den Dimensionen von $\omega, \omega', \omega''$, u. s. w. $P + p +$ u. s. w. werde; wenn die Größe p welche die ersten Glieder der Entwicklung enthält, im welchem $\omega, \omega', \omega''$, u. s. w. nur zwey Dimensionen bilden: so würde man hieraus, wie weiter oben geschehen ist, schließen, daß die Größe p besonders, die Erstefunktion einer Funktion von

$$x, y, y', \text{u. s. w. } \varphi, \varphi', \text{u. s. w.}$$

seyn müsse; aber aus der allgemeinen Theorie von der Entwicklung der Funktionen von mehrerern veränderlichen Größen (no. 85) ist es leicht zu sehen, daß man allgemein $p = 2Q$ hat; also ist die Größe Q eine Erstefunktion, y und ω mögen seyn was sie wollen, und sie noch eine Erstenfunktion seyn, wenn man $y + \omega$ nur substituirt. Und wenn man annimmt, daß durch diese

Subſtitution und durch die Entwicklung nach den Potenzen und Produkten von ω, ω', u. ſ. w. aus dieſer Funktion $Q + q +$ u. ſ. w. werde, wenn die Größe q die erſten Glieder der Entwicklung enthalten wo $\omega, \omega', \omega''$, nur drey Dimenſionen bilden, ſo würde man daraus auch ſchließen, wie oben, daß die Größe q ſelbſt eine Erſtefunktion ſey; aber nach der Theorie der Entwickelung findet man bequem $q = 3R$; alſo wird die Größe R ſelbſt auch eine Erſtefunktion ſeyn, u. ſ. w. In der That, wenn r, s u. ſ. w. die erſten Glieder von der Entwicklung der Größen R u. ſ. w. ſind, ſo wird, nach der Subſtitution von $y + \omega$ an der Stelle von ω, dieſe Theorie $r = 4S$, $s = 5T$, u. ſ. w. geben, woraus man, wenn man demſelben Raiſonnement folgt, ſchließen wird, daß die Größen S, T u. ſ. w. jede für ſich auch Erſtefunktionen ſeyn werden.

Alſo, muß die Reihe $P + Q + R +$ u. ſ. nothwendig die Erſtefunktion einer Funktion von x, y, y', u. ſ. w. ω, ω', u. ſ. w. ſeyn, welches auch immer die Werthe von y und ω in x ſeyn mögen. Mithin muß die Größe

$$f(x, y + \omega, y' + \omega' \ldots) - f(x\, y, y' \ldots)$$

welche dieſer Reihe gleich iſt, eine Erſtefunktion bey jedem beliebigen Werthe von ω ſeyn, und folglich auch wenn man $\omega = -y$ macht; denn in dieſem Fall, wird die Funktion

$$f(x, y + \omega, y' + \omega' \ldots)$$

nichts als eine einfache Funktion von x ohne y und ω ſeyn, welche man ſich als eine Erſtefunktion einer Funktion von x denken kann. Alſo muß die Funktion

$$f(x, y, y', y'' \ldots)$$

nothwendig die Erſtefunktion einer Funktion von x, y, y' u. ſ. w. ſeyn.

Es folgt hieraus, daß die Gleichung

$$f'(y) - [f''(y')]' + [f'''(y'')]'' - \text{u. f. w} = 0$$

die Merkmale enthält, wodurch man erkennen kann, ob die Funktion

$$f(x, y, y', y'', \ldots$$

eine Erstefunktion ist oder nicht.

Man wird nach derselben Art finden, daß die beyden Gleichungen

$$f'(y) - [f''(y')]' + [f'''(y'')]'' - \text{u. f. w.} = 0,$$
$$f'(z) - [f''(z')]' + [f'''(z'')]'' - \text{u. f. w.} = 0.$$

die Merkmale enthalten, wodurch man erkennen kann, ob die Funktion

$$f(x, y, y', \ldots z, z', \ldots)$$

eine Erstefunktion ist oder nicht, wenn die Größen y und z unabhängig sind.

Aber wenn die Größe z von der Gleichung

$$\varphi(x, y, y' \ldots z, z' \ldots) = 0$$

abhingen, so hätte man wie in no. 181,

$$f'(y) - [f''(y')]' + [f'''(y'')]'' - \text{u. f. w.} + \Delta\varphi'(y)$$
$$- [\Delta\varphi''(y')]' + [\Delta\varphi'''(y'')]'' - \text{u. f. w.} = 0$$
$$f'(z) - [f''(z')]' + [f'''(z'')]'' - \text{u. f. w.} + \Delta\varphi'(z)$$
$$- \Delta\varphi''(z')]' + [\Delta\varphi'''(z'')]'' - \text{u. f. w.} = 0$$

und die aus der Eliminirung des unbestimmten Δ entsprungene Gleichung, wird die Merkmale enthalten, wodurch man erkennen kann, ob die Funktion

$$f(x, y, y', \ldots z, z' \ldots)$$

selbst eine Erstefunktion ist oder nicht.

Da die ursprüngliche Funktion der Größe

$$\omega f'(y) + \omega' f''(y') + \omega'' f'''(y'') + \text{u. f. w.}$$

durch $\omega\beta + \omega'\gamma + \omega''\delta = u$, f. w.

(Nr. 171) vorgestellt ist, so wird man, wenn man willkührliche beständige Größe wegläßt, welches erlaubt

ist

ist auf dieselbe Art finden, daß das Merkmal wodurch man erkennen kann ob diese ursprüngliche Funktion selbst eine Erstefunction ist, mit in der Gleichung

$$\beta - \gamma' + \delta'' - \text{u. s. w.} = 0$$

enthalten ist, woraus, wenn man für β, γ, δ, u. s. w. ihre Werthe (Nr. 172) substituirt wird

$$f'(y') - 1.2[f'(y'')]^2 + 3[f'(y''')]'' - \text{u. s. w.} = 0.$$

Also, wird das System dieser Gleichung in der oben gefundenen Gleichung das Kennzeichen enthalten, nach welchem man beurtheilen kann, ob die Funktion

$$f(x, y, y', y'' \ldots)$$

selbst die Zweytefunktion einer Funktion von

$$x, y, y', y'', \text{u. s. w.}$$

ist oder nicht: und so weiter.

Diese verschiedene Gleichungen entsprechen dem, was man in der Differential-Rechnung Bedingung der Integrabilität nennt, und womit man sich in jetzigen Zeiten so viel beschäftigt hat. Wir begnügen uns hiermit, auf eine directe und strenge Art die Principen von der Uebereinstimmung dieser Gleichungen mit denjenigen des Maximum und Minimum der ursprünglichen Funktionen festgesetzt zu haben; und was den Gebrauch dieser Bedingungsgleichungen betrifft, so verweisen wir auf die verschiedenen Werke die davon handeln.

184.

Obgleich die in vorhergehenden Paragraphen angewandten Relationen zwischen den ersten Gliedern p, q, r, u s. w. aus der Entwickelung der Größen P, Q, R, u. s. w und diesen nemlichen Größen, leicht aus der allgemeinen Formel von der Entwickelung der Funktionen abgeleitet werden können; so würde es doch sehr nützlich

seyn,

n, bey mehreren Gelegenheiten das allgemeine Geſetz erkennen, welches zwiſchen den Gliedern der urſprüng- hen Entwickelung und denen der neben Entwickelungen itt haben muß; wir werden daher dieſes allgemeine Ge- z auf eine directe Art darſtellen, dieſes ſoll als Sup- ement zu der Theorie von der Entwickelung der Funk- ionen dienen, welche im erſten Theile dargeſtellt iſt.

Wir wollen, ganz allgemein eine Funktion

$$f(x, y, z \ldots)$$

on mehreren veränderlichen unabhängigen Größen x, y, z, . ſ. w. betrachten, und annehmen daß durch die Sub- itution von $x + \alpha$, $y + \beta$, $z + \gamma$, u ſ. w. an der Stelle von x, y, z u. ſ. w. und durch die Entwickelung ach den Potenzen und Producten von α, β, γ, u. ſ. w., ieſe Funktion ſich in

$$f(x, y, z \ldots) + f(1) + f(2) + f(3) + \text{u. ſ. w.}$$

rwandeln.

Ich bezeichne durch $f(1)$ die Summe von allen Glie- rn wo die Größen α, β, γ, u. ſ. w. in der erſten Di- enſion ſeyn werden, durch $f(2)$ die Summe von allen liedern wo dieſe nemlichen Größen zwey Dimenſionen lden werden, und ſo weiter.

Wir wollen ferner vorausſetzen, daß, indem man die- lbe Subſtitution und dieſelbe Entwicklung in den Funk- onen

$$f(1), f(2), f(3) \text{ u. ſ. w.}$$

ornimmt, ſie ſich in folgende verwandeln

$$f(1) + f(1, 1) + f(1, 2) + f(1, 3) + \text{u. ſ. w.}$$
$$f(2) + f(2, 1) + f(2, 2) + f(2, 3) + \text{u. ſ. w.}$$
$$f(3) + f(3, 1) + f(3, 2) + f(3, 3) + \text{u. ſ. w.}$$

o ich drrch

$$f(1, 1), f(1, 2), \text{u. ſ. w.}$$

die

die auf einander folgende Stellen der Glieder aus der Entwicklung von $f(1)$ bezeichne, ſo daß, weil die Größen α, β, γ, u. ſ. w. von der erſten Dimenſion in $f(1)$ ſind, ſie zwey Dimenſionen in $f(1, 1)$ drey Dimenſionen in $f(1, 2)$ und ſo fort in den andern, bilden werden. Man ſieht aus dieſer Bezeichnung, daß ganz allgemein die durch $f(m, n)$ angedeutete Größe alle Glieder aus der Entwicklung von $f(m)$ enthalten wird, wo die Größen α, β, γ u. ſ. w. in $+ n$ Dimenſionen bilden werden.

Dieſes vorausgeſetzt, wollen wir annehmen, daß ſogleich

$$x + \alpha, y + \beta, z + \gamma, \text{ u. ſ. w.}$$

in der Funktion

$$f(x, y, z \ldots)$$

ſubſtituirt würde, ſo wird ſie alsdann werden

$$f(x, y, z \ldots) + f(1) + f(2) + f(3) + \text{u. ſ. w.}$$

und wenn man ferner in dieſer Größe

$$x + m\alpha, y + m\beta, z + m\gamma$$

für x, y, z, ſubſtituirte, ſo iſt es klar, daß ſie werden würde

$$\begin{aligned} &f(x, y, z \ldots) + f(1) + f(2) + f(3) + \text{u. ſ. w.} \\ &\quad + mf(1) + m^2f(2) + m^3f(3) + \text{u. ſ. w.} \\ &\quad + mf(1, 1) + m^2f(1, 2) + m^3f(1, 3) + \text{u. ſ. w.} \\ &\quad + mf(2, 1) + m^2f(2, 2) + m^3f(2, 3) + \text{u. ſ. w.} \\ &\quad + mf(3, 1) + m^2f(3, 2) + m^3f(3, 3) + \text{u. ſ. w.} \\ &\quad + \text{und ſo weiter.} \end{aligned}$$

Von einer andern Seite, iſt es leicht ſichtbar, daß dieſe beyden auf einander folgenden Subſtitutionen einer einzigen Subſtitution gleichbedeutend ſind, welche man in der Funktion

$$f(x, y, z \ldots)$$

machen würde, indem man

$x+(1+m)\alpha$, $y+(1+m)\beta$, $z+(1+m)\gamma$ u. ſ. w.

an der Stelle von x, y, z, u. ſ. w. ſetzte, und welche durch die Entwicklung

$$f(x, y, z \ldots) + 1\,(1+m)\,f(1) + (1+m)^2 f(1) + (1+m)^3 f(3) + \text{u. ſ. w.}$$

geben würde.

Es müſſen alſo dieſe beyden Entwickelungen identiſch ſeyn, und daher die Glieder, welche dieſelben Dimenſionen von α, β, γ, u. ſ. w. enthalten, einander gleich ſeyn, was übrigens auch immer die Größe m ſeyn mag. Man wird daher folgende Vergleichungen haben:

$$f(1)+mf(1) = (1+m)f(1),$$
$$f(2)+m^2f(2)+mf(1,1) = (1+m)^2f(2),$$
$$f(3)+m^3f(3)+m^2f(1,2)+mf(2,1) = (1+m)^3f(3),$$
$$f(4)+m^4f(4)+m^3f(1,3)+m^2f(2,2) + mf(3,1) = (1+m)^4f(4),$$

und ſo weiter.

Und wenn man noch, die mit denſelben Potenzen von m behafteten Glieder, vergleicht, ſo kann man hieraus folgende Werthe ziehen:

$$f(1,1) = 2f(2),$$
$$f(1,2) = 3f(3),\ f(2,1) = 3f(3)$$
$$f(1,3) = 4f(4),$$
$$f(2,2) = 6f(4),\ f(3,1) = 4f(4),$$

und ſo weiter.

In dem Fall von Nr. 183, wenn man die Größen y, y′, y″, u. ſ. w. für eben ſo viele veränderliche und abhängige Größen ſetzt, und α, α', α'', u. ſ. w. für die Größen, um die man ſie reſpective wachſen läßt, iſt es klar, daß die Größen P, Q, R, u. ſ. w. den Größen

$f(1,)$

$f(1), f(2), f(3)$, u. ſ. w.

und die Größen p, q, r, u. ſ. w. den Größen

$f(1, 1), f(2, 1), f(3, 1)$; u. ſ. w.

entſprechen. Alſo geben die vorhergehenden Formeln auf der Stelle folgende Relationen,

$$p = 2Q, \quad q = 3R, \text{ u. ſ. w}$$

wovon wir Gebrauch gemacht haben.

Wir bemerken noch, daß man nach den vorhergehenden Relationen, noch den Beweis derſelben Nummer vereinfachen könnte. Denn, weil die Größe P oder $f(1)$ eine Erſtefunktion iſt, y und z mögen ſeyn, was ſie wollen, ſo werden alle Größen

$f(1, 1), f(1, 2), f(1, 3)$; u. ſ. w.

welche aus der Entwicklung von $f(1)$ enſpringen, jede für ſich Erſtefunktionen ſeyn: mithin ſind die Größen

$f(2), f($, $f(4)$, u. ſ. w.

das heißt Q, P u. ſ. w.

ſtefunktionen; c u. ſ. w.

Wir beſch a hiermit die Anwendungen von der Theorie der ktionen auf die Geometrie: Wir würden ſie viel ausgedehnt haben, wenn die Gränzen dieſes Werk erlaubt hätten; aber es iſt genug den Weg vorgeze zu haben, um in aller Strenge durch dieſe Theori die Eigenſchaften der Curven uud der Oberflächen, welche von der Differenzialrechnung abhängen, zu zeigen.

Anwen-

Anwendung auf die Mechanik.

Ich werde jetzt die Theorie der Funktionen in Beziehung auf die Mechanik betrachten. Hier beziehen sich die Funktionen wesentlich auf der Zeit, welche wir immer durch t bezeichnen werden; und da die Lage eines Punkts im Raume von drey rechtwinklichten Coordinaten x, y, z, abhängt, so wird man sich in den Problemen der Mechanik, diese Coordinaten als Funktionen von t vorstellen. Man kann daher die Mechanik als eine Geometrie von vier Dimensionen, und die mechanische Analysis als eine Erweiterung der geometrischen Analysis ansehen.

Wir wollen zuerst die geradlinigten Bewegungen betrachten, und annehmen daß x der während der Zeit t durchlaufene Raum sey, so hat man $x = ft$, und die Funktion ft muß so beschaffen seyn daß sie Null wird wenn $x = 0$ ist. Die einfachste Form von ft ist unstreitig at; dieses giebt $x = at$, wo a eine beständige Größe ist: also sind bey der, durch diese Gleichung vorgestellten Bewegung die durchlaufene Räume immer den, seit dem Anfange der Bewegung, verflossenen Zeiten proportionirt; dieses ist diejenige Eigenschaft der Bewegung welche man gleichförmig nennt. Die beständige Größe a welche die Beziehung des Raums auf der Zeit ausdrückt, ist das Maas desjenigen was man die Geschwindigkeit nennt; dieses ist das einzige Element welches in diese Art von Bewegung hineinkömmt, und wodurch sich eine gleichförmige Bewegung von der andern gleichförmigen Bewegung unterscheidet.

Die Beobachtung und Erfahrung hat uns gelehrt, daß ein auf irgend eine Art in Bewegung gesetzter Körper von selbst fortfährt sich in einer geradlinigten und gleichförmigen Bewegung zu bewegen, wenn man alle Ursachen der Veränderung absondert, welche auf ihn wirken können; woraus folgt, daß die einmal eingeprägte Geschwindigkeit immer dieselbe bleibt, und zwar nach derselben Richtung: Dies ist das erste Gesetz der Bewegung.

Wenn man die Zeit durch die Abscisse, und den durchlaufenen Raum durch die Ordinate einer Linie vorstellt, so ist klar daß diese Linie für die gleichförmige Bewegung immer eine durch den Ursprung der Abscissen gehende gerade Linie seyn wird, und daß die Tangente des Winkels den sie mit der Axe macht das Maaß der Geschwindigkeit der Bewegung ist

186.

Die allereinfachste Funktion von t nach at ist bt^1; nimmt man diesen Ausdruck für ft so hat man eine andere Art von geradlichten Bewegung welche durch die Gleichung $x = bt^a$ vorgestellt wird, in dieser verhalten sich die seit dem Anfange der Bewegung zurückgelegten Räume wie die Quadratur der Zeiten.

Die Beobachtung und Erfahrung zeigen uns auch täglich diese Bewegung bey Körpern welche durch ihre Schwere fallen, wenn man nemlich von dem Widerstand der Luft, und von allen anderen fremden Ursachen der Veränderung, abstrahirt. Die beständige Größe b, welche das einzige Element ist, was in die Beschaffenheit dieser Bewegung hineinkommt, ist für alle Körper an denselben Ort der Erde, die nemliche, und hängt von der Kraft

der

der Schwere ab welche sie hervorbringt, und die ohne aufhören auf dieselbe Art auf das Bewegte wirkt. Also pflanzt sich nur die Bewegung vermöge der Kraft fort, welche man als eine äußere beständig auf den Körper würkende Ursache ansehen kann, und wovon der Coefficient b das Maaß ist.

Da in dieser Bewegung die Räume in einem viel größern Verhältniß zunehmen als die Zeiten, so nennt man sie beschleunigte Geschwindigkeit, und ins besondere nennt man die in redestehende, die gleichförmig beschleunigte, davon wir die Ursache sogleich sehen werden.

Wenn man hier die Zeit durch die Abscisse, und den durchlaufenen Raum durch die Ordinate einer Curve vorstellt, so sieht man daß diese Curve eine Parabel ist, deren Parameter $\frac{1}{b}$ ist, und deren Hauptaxe die Axe von den Ordinaten y ist.

Die einfachste Bewegung, nach der welche wir so eben betrachtet haben würde diese seyn, wo $x = et^3$ ist; wir sehen aber in der Natur keine solche einfache Bewegung von dieser Art, und wissen auch nicht was der Coefficient c vorstellen könnte, indem man ihn auf eine absolute Art und unabhängig von den Geschwindigkeiten und Kräften betrachtet.

Dieses sind die einfachen Bewegungen woraus alle andere Arten von Bewegung als zusammengesetzt betrachten werden können, und die Kunst der Mechanik besteht in dieser Zusammensetzung und Zerlegung, woraus die Verhältniße zwischen den Zeiten, den Räumen, den Geschwindigkeiten und den Kräften entspringen.

187.

Wenn man die ſo eben betrachteten beyden Arten von Bewegung vereinigt, ſo hat man eine Bewegung die durch die Gleichung

$$x = at + bt^a$$

vorgeſtellt iſt, die daher aus einer gleichförmigen und einer gleichförmigen beſchleunigten zuſammengeſetzt iſt, und aus der Vereinigung der beyden Urſachen entſteht, welche jede von ihnen ins beſondere hervorbringen kann, das heißt, aus einer urſprünglich eingepflaneten Geſchwindigkeit die a proportional iſt, und aus der beſchleunigenden beſtändig auf das Bewegte würkenden Kraft die b proportional iſt.

Die Natur zeigt uns auch die Zuſammenſetzung dieſer beyden Bewegungen, bey ſchweren ſenkrecht von oben hinunter oder von unten hinauf geworfenen Körpern, wenn man von den Widerſtande der Luft und allen anfremden Urſachen abſtrahirt. Bey Körpern welche ſenkrecht von oben herunter geworfen werden, würkt die Kraft b, in der Richtung der Kraft ſelbſt, wie wir es vorausſetzen aber bey Körpern welche ſenkrecht von unten hinauf geworfen werden, wirkt die Kraft b im entgegengeſetzten Sinne, und wird daher negativ: ſie beſtrebt ſich alſo die Bewegung des Körpers zu hemmen, und heißt alsdenn verzögernde Kraft. Die Bewegung ſelbſt wird in dieſem Falle gleichförmig verzögernd genannt.

Wir ſehen durch die Beobachtung, daß, in der Zuſammenſetzung dieſer beyden Bewegungen, jede von beyden ſich ſo erhält als wenn ſie allein in dem Bewegten befindlich wäre ſo daß der, am Ende irgend eines Zeitraums, durchlaufene Raum, genau die Summe oder Differenz der Räume iſt, welche das Bewegte kraft der beyden

beyden Urſachen welche die beyden Bewegungen, hervorbringen für ſich durchlaufen haben würde; ſo daß das Reſultat das heißt der durchlaufene Raum derſelbe iſt, als wenn man die beyden Bewegungen für ſich und ſucceſſive ſtatt gefunden hätten.

188.

Wir wollen jetzt irgend eine geradlinigte durch die Gleichung $x = ft$ vorgeſtellte Bewegung betrachten. Am Ende der Zeit t wird das Bewegte den Raum ft und am Ende der Zeit $t + \theta$ der Raum $f(t + \theta)$ durchlaufen haben: es wird daher die Differenz $(t + \theta) - ft$ der während der Zeit θ durchlaufene Raum ſeyn, welche den Augenblick als ſich die Zeit t endigte anfing. Wenn die Funktion $f(t + \theta)$ nach den Potenzen von θ entwickelt wird, ſo erhält man

$$ft + \theta f't + \frac{\theta^2}{2} f''t + \text{u. ſ. w.}$$

wie wir es im erſten Theile geſehen haben; mithin wird der während der Zeit θ durchlaufene Raum durch die Formel

$$\theta f't + \frac{\theta^2}{2} f''t + \frac{\theta^3}{2.3} f'''t + \text{u. ſ. w.}$$

vorgeſtellt ſeyn, worin die, vor der Zeit θ verfloſſene Zeit t jetzt als eine beſtändige Größe anzuſehen iſt. Alſo die Bewegung mit welcher dieſer Raum durchlaufen iſt, wird daher aus verſchiedenen partial Bewegungen zuſammengeſetzt ſeyn, die der Zeit θ entſprechenden Räume ſind alſo

$$\theta f't, \frac{\theta^2}{2} f''t, \frac{\theta^3}{2.3} f'''t, \text{ u. ſ. w.;}$$

und man ſieht, daß die erſte dieſer Partialbewegungen mit

iſt auf dieſelbe Art finden, daß das Merkmal wodurch man erkennen kann ob dieſe urſprüngliche Funktion ſelbſt eine Erſtefunction iſt, mit in der Gleichung

$$\beta - \gamma' + \delta'' - \text{u. ſ. w.} = 0$$

enthalten iſt, woraus, wenn man für β, γ, δ, u. ſ. w. ihre Werthe (Nr. 172) ſubſtituirt wird

$$f'(y') - \frac{1}{2}[f'(y'')]^2 + 3[f'(y''')]^4 - \text{u. ſ. w.} = 0.$$

Alſo, wird das Syſtem dieſer Gleichung in der oben gefundenen Gleichung das Kennzeichen enthalten, nach welchem man beurtheilen kann, ob die Funktion

$$f(x, y, y', y'' \ldots)$$

ſelbſt die Zweytefunktion einer Funktion von

$$x, y, y', y'', \text{u. ſ. w.}$$

iſt oder nicht: und ſo weiter.

Dieſe verſchiedene Gleichungen entſprechen dem, was man in der Differential-Rechnung Bedingung der Integrabilität nennt, und womit man ſich in jetzigen Zeiten ſo viel beſchäftigt hat. Wir begnügen uns hiermit, auf eine directe und ſtrenge Art die Principen von der Uebereinſtimmung dieſer Gleichungen mit denjenigen des Maximum und Minimum der urſprünglichen Funktionen feſtgeſetzt zu haben; und was den Gebrauch dieſer Bedingungsgleichungen betrifft, ſo verweiſen wir auf die verſchiedenen Werke die davon handeln.

184.

Obgleich die in vorhergehenden Paragraphen angewandten Relationen zwiſchen den erſten Gliedern p, q, r, u ſ. w. aus der Entwickelung der Größen P, Q, R, u. ſ. w und dieſen nemlichen Größen, leicht aus der allgemeinen Formel von der Entwickelung der Funktionen abgeleitet werden können; ſo würde es doch ſehr nützlich

ſeyn,

ſeyn, bey mehreren Gelegenheiten das allgemeine Geſetz zu erkennen, welches zwiſchen den Gliedern der urſprünglichen Entwickelung und denen der neuen Entwickelungen ſtatt haben muß; wir werden daher dieſes allgemeine Geſetz auf eine directe Art darſtellen, dieſes ſoll als Supplement zu der Theorie von der Entwickelung der Funktionen dienen, welche im erſten Theile dargeſtellt iſt.

Wir wollen, ganz allgemein eine Funktion

$$f(x, y, z \ldots)$$

von mehreren veränderlichen unabhängigen Größen x, y, z, u. ſ. w. betrachten, und annehmen daß durch die Subſtitution von $x + \alpha$, $y + \beta$, $z + \gamma$, u ſ. w. an der Stelle von x, y, z u. ſ. w. und durch die Entwickelung nach den Potenzen und Producten von α, β, γ, u. ſ. w., dieſe Funktion ſich in

$$f(x, y, z \ldots) + f(1) + f(2) + f(3) + \text{u. ſ. w.}$$

verwandeln.

Ich bezeichne durch $f(1)$ die Summe von allen Gliedern wo die Größen α, β, γ, u. ſ. w. in der erſten Dimenſion ſeyn werden, durch $f(2)$ die Summe von allen Gliedern wo dieſe nemlichen Größen zwey Dimenſionen bilden werden, und ſo weiter.

Wir wollen ferner vorausſetzen, daß, indem man dieſelbe Subſtitution und dieſelbe Entwicklung in den Funktionen

$$f(1), f(2), f(3) \text{ u. ſ. w.}$$

vornimmt, ſie ſich in folgende verwandeln

$$f(1) + f(1, 1) + f(1, 2) + f(1, 3) + \text{u. ſ. w.}$$
$$f(2) + f(2, 1) + f(2, 2) + f(2, 3) + \text{u. ſ. w.}$$
$$f(3) + f(3, 1) + f(3, 2) + f(3, 3) + \text{u. ſ. w.}$$

wo ich durch

$$f(1, 1), f(1, 2), \text{u. ſ. w.}$$

die

die auf einander folgende Stellen der Glieder aus der Entwicklung von $f(1)$ bezeichne, so daß, weil die Größen α, β, γ, u. s. w. von der ersten Dimension in $f(1)$ sind, sie zwey Dimensionen in $f(1, 1)$ drey Dimensionen in $f(1, 2)$ und so fort in den andern, bilden werden. Man sieht aus dieser Bezeichnung, daß ganz allgemein die durch $f(m, n)$ angedeutete Größe alle Glieder aus der Entwicklung von $f(m)$ enthalten wird, wo die Größen α, β, γ u. s. w. in $+n$ Dimensionen bilden werden.

Dieses vorausgesetzt, wollen wir annehmen, daß sogleich

$$x + \alpha, y + \beta, z + \gamma, \text{ u. s. w.}$$

in der Funktion

$$f(x, y, z \ldots)$$

substituirt würde, so wird sie alsdann werden

$$f(x, y, z \ldots) + f(1) + f(2) + f(3) + \text{u. s. w.}$$

und wenn man ferner in dieser Größe

$$x + m\alpha, y + m\beta, z + m\gamma$$

für x, y, z, substituirte, so ist es klar, daß sie werden würde

$$\begin{aligned} &f(x, y, z \ldots) + f(1) + f(2) + f(3) + \text{u. s. w.} \\ &\quad + mf(1) + m^2f(2) + m^3f(3) + \text{u. s. w.} \\ &\quad + mf(1, 1) + m^2f(1, 2) + m^3f(1, 3) + \text{u. s. w.} \\ &\quad + mf(2, 1) + m^2f(2, 2) + m^3f(2, 3) + \text{u. s. w.} \\ &\quad + mf(3, 1) + m^2f(3, 2) + m^3f(3, 3) + \text{u. s. w.} \\ &\quad + \text{und so weiter.} \end{aligned}$$

Von einer andern Seite, ist es leicht sichtbar, daß diese beyden auf einander folgenden Substitutionen einer einzigen Substitution gleichbedeutend sind, welche man in der Funktion

$$f(x, y, z \ldots)$$

mache

machen würde, indem man

$x+(1+m)\alpha$, $y+(1+m)\beta$, $z+(1+m)\gamma$ u. ſ. w.

an der Stelle von x, y, z, u. ſ. w. ſetzte, und welche durch die Entwicklung

$$f(x, y, z \ldots) + 1\,(1+m)\,f(1) + (1+m)^2 f(1) + (1+m)^3 f(3) + \text{u. ſ. w.}$$

gehen würde.

Es müſſen alſo dieſe beyden Entwickelungen identiſch ſeyn, und daher die Glieder, welche dieſelben Dimenſionen von α, β, γ, u. ſ. w. enthalten, einander gleich ſeyn, was übrigens auch immer die Größe m ſeyn mag. Man wird daher folgende Vergleichungen haben:

$$f(1)+mf(1) = (1+m)f(1),$$
$$f(2)+m^2f(2)+mf(1,1) = (1+m)^2f(2),$$
$$f(3)+m^3f(3)+m^2f(1,2)+mf(2,1) = (1+m)^3f(3),$$
$$f(4)+m^4f(4)+m^3f(1,3)+m^2f(2,2) + mf(3,1) = (1+m)^4f(4),$$

und ſo weiter.

Und wenn man noch, die mit denſelben Potenzen von m behafteten Glieder, vergleicht, ſo kann man hieraus folgende Werthe ziehen:

$$f(1,1) = 2f(2),$$
$$f(1,2) = 3f(3),\ f(2,1) = 3f(3)$$
$$f(1,3) = 4f(4),$$
$$f(2,2) = 6f(4),\ f(3,1) = 4f(4),$$

und ſo weiter.

In dem Fall von Nr. 183, wenn man die Größen y, y′, y″, u. ſ. w. für eben ſo viele veränderliche und abhängige Größen ſetzt, und ω, ω', ω'', u. ſ. w. für die Größen, um die man ſie reſpective wachſen läßt, iſt es klar, daß die Größen P, Q, R, u. ſ. w. den Größen

$f(1,)$

$f(1), f(2), f(3)$, u. ſ. w.

und die Größen p, q, r, u. ſ. w. den Größen

$f(1, 1), f(2, 1), f(3, 1)$; u. ſ. w.

entſprechen. Alſo geben die vorhergehenden Formeln auf der Stelle folgende Relationen,

$$p = 2Q, \quad q = 3R, \text{ u. ſ. w}$$

wovon wir Gebrauch gemacht haben.

Wir bemerken noch, daß man nach den vorhergehenden Relationen, noch den Beweis derſelben Nummer vereinfachen könnte. Denn, weil die Größe P oder $f(1)$ eine Erſtefunktion iſt, y und z mögen ſeyn, was ſie wollen, ſo werden alle Größen

$f(1, 1), f(1, 2), f(1, 3)$; u. ſ. w.

welche aus der Entwicklung von $f(1)$ enſpringen, jede für ſich Erſtefunktionen ſeyn: mithin ſind die Größen

$f(2), f($, $f(4)$, u. ſ. w.

das heißt Q, P u. ſ. w.

ſtefunktionen; u. ſ. w.

Wir beſch a hiermit die Anwendungen von der Theorie der F tionen auf die Geometrie: Wir würden ſie viel ausgedehnt haben, wenn die Gränzen dieſes Werk erlaubt hätten; aber es iſt genug den Weg vorgezei zu haben, um in aller Strenge durch dieſe Theorie die Eigenſchaften der Curven uud der Oberflächen, welche von der Differenzialrechnung abhängen, zu zeigen.

Anwen-

Anwendung auf die Mechanik.

Ich werde jetzt die Theorie der Funktionen in Beziehung auf die Mechanik betrachten. Hier beziehen sich die Funktionen wesentlich auf der Zeit, welche wir immer durch t bezeichnen werden; und da die Lage eines Punkts im Raume von drey rechtwinklichten Coordinaten x, y, z, abhängt, so wird man sich in den Problemen der Mechanik, diese Coordinaten als Funktionen von t vorstellen. Man kann daher die Mechanik als eine Geometrie von vier Dimensionen, und die mechanische Analysis als eine Erweiterung der geometrischen Analysis ansehen.

Wir wollen zuerst die geradlinigten Bewegungen betrachten, und annehmen daß x der während der Zeit t durchlaufene Raum sey, so hat man $x = ft$, und die Funktion ft muß so beschaffen seyn daß sie Null wird wenn $x = 0$ ist. Die einfachste Form von ft ist unstreitig at; dieses giebt $x = at$, wo a eine beständige Größe ist: also sind bey der, durch diese Gleichung vorgestellten Bewegung die durchlaufene Räume immer den, seit dem Anfange der Bewegung, verflossenen Zeiten proportionirt; dieses ist diejenige Eigenschaft der Bewegung welche man gleichförmig nennt. Die beständige Größe a welche die Beziehung des Raums auf der Zeit ausdrückt, ist das Maas desjenigen was man die Geschwindigkeit nennt; dieses ist das einzige Element welches in diese Art von Bewegung hineinkömmt, und wodurch sich eine gleichförmige Bewegung von der andern gleichförmigen Bewegung unterscheidet.

Die Beobachtung und Erfahrung hat uns gelehrt, daß ein auf irgend eine Art in Bewegung gesetzter Körper von selbst fortfährt sich in einer geradlinigten und gleichförmigen Bewegung zu bewegen, wenn man alle Ursachen der Veränderung absondert, welche auf ihn wirken können; woraus folgt, daß die einmal eingeprägte Geschwindigkeit immer dieselbe bleibt, und zwar nach derselben Richtung: Dies ist das erste Gesetz der Bewegung.

Wenn man die Zeit durch die Abscisse, und den durchlaufenen Raum durch die Ordinate einer Linie vorstellt, so ist klar daß diese Linie für die gleichförmige Bewegung immer eine durch den Ursprung der Abscissen gehende gerade Linie seyn wird, und daß die Tangente des Winkels den sie mit der Axe macht das Maaß der Geschwindigkeit der Bewegung ist

186.

Die allereinfachste Funktion von t nach at ist bt^2; nimmt man diesen Ausdruck für ft so hat man eine andere Art von geradlichten Bewegung welche durch die Gleichung $x = bt^2$ vorgestellt wird, in dieser verhalten sich die seit dem Anfange der Bewegung zurückgelegten Räume wie die Quadratur der Zeiten.

Die Beobachtung und Erfahrung zeigen uns auch täglich diese Bewegung bey Körpern welche durch ihre Schwere fallen, wenn man nemlich von dem Widerstand der Luft, und von allen anderen fremden Ursachen der Veränderung, abstrahirt. Die beständige Größe b, welche das einzige Element ist, was in die Beschaffenheit dieser Bewegung hineinkommt, ist für alle Körper an denselben Ort der Erde, die nemliche, und hängt von der Kraft

der

r Schwere ab welche ſie hervorbringt, und die ohne fhören auf dieſelbe Art auf das Bewegte wirkt. Alſo anzt ſich nur die Bewegung vermöge der Kraft fort, lche man als eine äußere beſtändig auf den Körper rkende Urſache anſehen kann, und wovon der Coefficient das Maaß iſt.

Da in dieſer Bewegung die Räume in einem viel- bßern Verhältniß zunehmen als die Zeiten, ſo nennt n ſie beſchleunigte Geſchwindigkeit, und ins beſon- re nennt man die in redeſtehende, die gleichförmig ſchleunigte, davon wir die Urſache ſogleich ſehen rden.

Wenn man hier die Zeit durch die Abſciſſe, und den rchlaufenen Raum durch die Ordinate einer Curve vor- llt, ſo ſieht man daß dieſe Curve eine Parabel iſt, de- n Parameter $\frac{1}{b}$ iſt, und deren Hauptaxe die Axe von n Ordinaten y iſt.

Die einfachſte Bewegung, nach der welche wir ſo en betrachtet haben würde dieſe ſeyn, wo $x = et^2$ iſt; ir ſehen aber in der Natur keine ſolche einfache Bewe- ung von dieſer Art, und wiſſen auch nicht was der efficient e vorſtellen könnte, indem man ihn auf eine ſolute Art und unabhängig von den Geſchwindigkeiten d Kräften betrachtet.

Dieſes ſind die einfachen Bewegungen woraus alle dere Arten von Bewegung als zuſammengeſetzt betrach- n werden können, und die Kunſt der Mechanik beſteht dieſer Zuſammenſetzung und Zerlegung, woraus die erhältniße zwiſchen den Zeiten, den Räumen, den Ge- ſchwindigkeiten und den Kräften entſpringen.

187.

Wenn man die so eben betrachteten beyden Arten von Bewegung vereinigt, so hat man eine Bewegung die durch die Gleichung

$$x = at + bt^a$$

vorgestellt ist, die daher aus einer gleichförmigen und einer gleichförmigen beschleunigten zusammengesetzt ist, und aus der Vereinigung der beyden Ursachen entsteht, welche jede von ihnen ins besondere hervorbringen kann, das heißt, aus einer ursprünglich eingepflanzten Geschwindigkeit die a proportional ist, und aus der beschleunigenden beständig auf das Bewegte würkenden Kraft die b proportional ist.

Die Natur zeigt uns auch die Zusammensetzung dieser beyden Bewegungen, bey schweren senkrecht von oben hinunter oder von unten hinauf geworfenen Körpern, wenn man von den Widerstande der Luft und allen anfremden Ursachen abstrahirt. Bey Körpern welche senkrecht von oben herunter geworfen werden, würkt die Kraft b, in der Richtung der Kraft selbst, wie wir es voraussetzen aber bey Körpern welche senkrecht von unten hinauf geworfen werden, wirkt die Kraft b im entgegengesetzten Sinne, und wird daher negativ: sie bestrebt sich also die Bewegung des Körpers zu hemmen, und heißt alsdenn verzögernde Kraft. Die Beweguug selbst wird in diesem Falle gleichförmig verzögernd genannt.

Wir sehen durch die Beobachtung, daß, in der Zusammensetzung dieser beyden Bewegungen, jede von beyden sich so erhält als wenn sie allein in dem Bewegten befindlich wäre so daß der, am Ende irgend eines Zeitraums, durchlaufene Raum, genau die Summe oder Differenz der Räume ist, welche das Bewegte kraft der beyden

eyden Urſachen welche die beyden Bewegungen, hervor-
ringen für ſich durchlaufen haben würde; ſo daß das
leſultat das heißt der durchlaufene Raum derſelbe iſt,
s wenn man die beyden Bewegungen für ſich und ſuc-
ſive ſtatt gefunden hätten.

188.

Wir wollen jetzt irgend eine geradlinigte durch die
leichung $x = ft$ vorgeſtellte Bewegung betrachten. Am
nde der Zeit t wird das Bewegte den Raum ft und
m Ende der Zeit $t + \theta$ der Raum $f(t + \theta)$ durch-
ufen haben: es wird daher die Differenz
$t + \theta) - ft$ der während der Zeit θ durchlaufene Raum
yn, welche den Augenblick als ſich die Zeit t endigte an-
g. Wenn die Funktion $f(t + \theta)$ nach den Potenzen
n θ entwickelt wird, ſo erhält man

$$ft + \theta f't + \frac{\theta^2}{2} f''t + \text{u. ſ. w.}$$

t wir es im erſten Theile geſehen haben; mithin wird
: während der Zeit θ durchlaufene Raum durch die
rmel

$$\theta f't + \frac{\theta^2}{2} f''t + \frac{\theta^3}{2.3} f'''t + \text{u. ſ. w.}$$

geſtellt ſeyn, worin die, vor der Zeit θ verfloſſene Zeit
etzt als eine beſtändige Größe anzuſehen iſt. Alſo die
wegung mit welcher dieſer Raum durchlaufen iſt, wird
yer aus verſchiedenen partial Bewegungen zuſammen-
etzt ſeyn, die der Zeit θ entſprechenden Räume ſind
)

$$\theta f't, \frac{\theta^2}{2} f''t, \frac{\theta^3}{2.3} f'''t, \text{ u. ſ. w.;}$$

r man ſieht, daß die erſte dieſer Partialbewegungen mit

einer durch $f't$ gemessenen Geschwindigkeit einerley ist (Nr. 185), und daß die zweyte dieser Partialbewegungen gleichförmig beschleunigt seyn wird, und einer $\frac{1}{2}f''t$ proportionalen beschleunigenden Kraft angehört.

Was die anderen betrifft, so wird es, da sie sich auf keiner einfachen bekannten Bewegung beziehen, nicht nothwendig seyn, sie besonders zu betrachten, und ich werde jetzt zeigen, daß man bey der Bestimmung der Bewegung am Anfang der Zeit θ davon abstrahiren kann.

In der That, wenn die Funktion $f(t+\theta)$ nach der allgemeinen Formel von Nr. 147. entwickelt wird, so hat man

$$ft + \theta f't + \frac{\theta^2}{2.3} f'''(t+\lambda\theta),$$

wo λ einen unbekannten Coefficienten bedeutet, dessen Werth nothwendig zwischen 0 und 1 enthalten ist; so daß der in der Zeit θ durchlaufene Raum genau durch die Formel

$$\theta f't + \frac{\theta^2}{2} f''t + \frac{\theta^3}{2.3} f'''(t+\lambda\theta),$$

ausgedrückt wird. Die beyden ersten Glieder stellen, wie man sieht, die aus einer gleichförmigen und gleichförmig beschleunigten zusammengesetzte Bewegung vor; das dritte stellt die Total-Summe der andern Bewegung vor, welche sich mit der erstern combinirt, und verhindert, daß die wahre Bewegung ein einfaches Resultat von diesen beyden seyn kann. Aber ich bemerke, daß man θ klein genug nehmen kann, damit die aus den beyden Gliedern

$$\theta f't + \frac{\theta^2}{2} f''t$$

zusammengesetzte Bewegung sich mehr der wahren Bewegung nähere, als es nur irgend eine andere aus einer gleich-

gleichförmigen und gleichförmig beſchleunigten Bewegung zuſammengeſetzte Bewegung könnte. Denn man kann den Unterſchied zwiſchen den während der Zeit θ durch die in redeſtehende zuſammengeſetzte Bewegung und zwiſchen den durch die wirkliche Bewegung durchlaufenen Räumen durch

$$\frac{\theta^3}{2.3} f''t(t+\lambda\theta)$$

ausdrücken; aber der durch eine ganz andere, aus einer gleichförmigen und gleichförmig beſchleunigten Bewegung, zuſammengeſetzte Bewegung durchlaufene Raum wird nach Nr. 187 durch

$$a.\theta + b\,\theta$$

vorgeſtellt, der Unterſchied zwiſchen dieſem Raume und dem würklich durchlaufenen iſt

$$\theta(f't - a) + \theta^2(\tfrac{1}{2}f''t - b) + \frac{\theta^3}{2.3} f'''(t+\lambda\theta);$$

es iſt leicht durch ein den in Nr. 111 ähnlichen Raiſonnement darzuthun, daß, um ſo viel auch a und b von $f't$ und $\frac{1}{2}f''t$ unterſchieden ſind, man doch immer θ klein genug nehmen können, damit dieſe letzte Differenz die erſte übertreffe, und daß, ſo lange als dieſe Bedingung für einen Werth von θ ſtatt hat, ſie um ſo viel mehr für jeden kleinern Werth ſtatt haben werde. Alſo drückt das Glied $\theta f't$ alles dasjenige aus, was nur gleichförmiges in der vorhergehenden Bewegung ſeyn kann, beym Anfang der Zeit s betrachtet, und das Glied $\frac{s^2}{2} f''t$ drückt eben ſo alles dasjenige aus, was nur gleichförmig beſchleunigtes in dieſer Bewegung ſeyn kann.

Man kann hieraus ſchließen, daß jede durch die Gleichung $x = ft$ vorgeſtellte geradlinigte Bewegung, in

irgend einen Augenblick am Ende der Zeit t, als aus einer gleichförmigen Bewegung welcher eine dem Bewegten eingeprägte durch $f't$ gemessene Geschwindigkeit zukömmt, und aus einer gleichförmig beschleunigten Bewegung, welcher eine beschleunigende Kraft zukömmt, die auf das Bewegte wirkt und $\frac{1}{2}f''t$ oder blos $f''t$ proportional ist, zusammengesetzt betrachtet werden kann; und daß daher, wenn die Ursachen, welche verhindern, daß die vorgegebene Bewegung gleichförmig bleibt, plötzlich zu würken aufhörten, die Bewegung von diesem Augenblick an auf eine gleichförmige Art mit einer durch $f't$ gemessenen Geschwindigkeit fortdauren würde; und daß wenn die Würkung dieser Ursachen, statt Null zu werden, beständig würde, die Bewegung alsdann aus einer gleichförmigen Bewegung, von welcher wir so eben gesprochen haben, und aus einer gleichförmig beschleunigten denselben Augenblick anfangenden Bewegung kraft einer beständigen beschleunigenden und $f''t$ proportionalen Kraft, zusammengesetzt seyn würde.

Mehrere Erscheinungen in der Natur, und besonders die Resultate von verschiedenen Erfahrungen die man über den Fall der Körper gemacht hat, bestätigen vollkommen den Schluß, welchen wir jetzt gefunden haben, und der als Fundamental-Princip in der ganzen Theorie der Bewegung angesehen werden muß.

189.

Also wird überhaupt, in einer geradlinigten Bewegung, in welcher der durchlaufene Raum eine durch die verflossene Zeit gegebene Funktion ist, die Erstefunktion dieser Funktion die Geschwindigkeit, und die Zweytefunktion die beschleunigende Kraft in irgend einem Zeitpunkt vorstel-

vorstellen; denn, da die Zeiten, die Räume, die Geschwindigkeiten und die Kräfte ungleichartige Dinge sind, welche man nicht mit einander vergleichen kann, ohne sie vorher in Zahlen zu reduciren, indem man jedes auf eine bestimmte Einheit seiner Art bezieht; so können wir mehrer Einfachheit wegen, die Geschwindigkeit und die Kraft unmittelbar durch die Erste- und Zweytefunktionen ausdrücken, so wie wir den Raum durch die ursprüngliche Funktion ausdrücken werden. Woraus man sieht, daß die Ersten und Zweytenfunktionen auch ganz natürlich in der Mechanik vorkommen, wo sie einen bestimmten Werth und eine bestimmte Bedeutung haben: dieses brachte eben dem Newton dahin, auf die Betrachtung der Bewegung den Fluxionen Calcul zu gründen. Also sind, der Raum, die Geschwindigkeit und die Kraft als Funktionen der Zeit betrachtet respektive durch die ursprüngliche Funktion, durch ihre Erstefunktion und durch ihre Zweytefunktion vorgestellt; so daß wenn man den Ausdruck für den Raum durch die Zeit kennt, man sogleich die Ausdrückungen für die Geschwindigkeit und für die Kraft durch die directe Analysis der Funktionen haben wird; aber wenn man nur die Geschwindigkeit oder die Kraft durch die Zeit kennt, so müßte man alsdenn zu den ursprünglichen Gleichungen nach den Regeln der ursprünglichen Analysis zurückgehen.

Wenn man also durch x den während der Zeit t durchlaufenen Raum bezeichnet, und x als eine Funktion von t ansieht, so hat man nach den bisher angewandten Bezeichnungen x' für die Geschwindigkeit am Ende dieser Zeit, und x'' für die beschleunigende Kraft in demselben Augenblick; woraus man sieht, daß wenn

das Gesetz der Bewegung durch eine Relation zwischen der Zeit, dem Raume der Geschwindigkeit und der Kraft gegeben ist, man eine Gleichung von der zweyten Ordnung zwischen t, x, x', x'', haben wird, woraus man die ursprüngliche Gleichung in t in x nach den Regeln der umgekehrten Analysis der Funktionen ziehen kann, und man wird die beyden beständigen willkührlichen Größen welche in dieser Gleichung mit hineinkommen, durch die gegebenen Werthe von x sind von x' in einem gegebenen Augenblick bestimmen, das heißt, durch den Raum und durch die Geschwindigkeit, welche man in diesem Augenblick als bekannt voraussetzt.

In der durch die Gleichung $x = at$ vorgestellten gleichförmigen Bewegung, hat man daher $x' = a$, $x'' = o$, also drückt der Coefficient, als Verhältniß des durchlaufenen Raums zur Zeit, die Geschwindigkeit aus, und die beschleunigende Kraft ist Null. In der gleichförmig beschleunigten durch $x = bt^2$ vorgestellten Bewegung hat man $x' = 2bt$ und $x'' = 2b$. Also ist die Geschwindigkeit in irgend einem Augenblicke der seit dem Anfange der Bewegung verflossenen Zeit proportional. Das Verhältniß zwischen der Geschwindigkeit und der Zeit drückt die beschleunigende Kraft aus, und ist das Zwiefache des Verhältnisses zwischen dem durchlaufenen Raume, und dem Quadrate der Zeit. Die immerwährende und gleichförmige Vermehrung der Geschwindigkeit in dieser Art von Bewegung hat ihr den Nahmen gleichförmig beschleunigte Bewegung gegeben.

Das aller einfachste und natürlichste Mittel die beschleunigenden Kräfte zu vergleichen, ist, daß man die

Kraft

Kraft der Schwere an einem gegebenen Ort für die Einheit annimmt. Man hat daher für die schweren Körper

$$2b = 1 \text{ und } b = \tfrac{1}{2};$$

$$\text{also } x = \frac{t^2}{2},\ t = \sqrt{2x}$$

so daß man die Geschwindigkeit durch die Quadratwurzel aus der doppelten Höhe bestimmen kann, von welcher ein schwerer Körper fallen muß, damit er diese Geschwindigkeit erlangt. Wenn man also eine gegebene Geschwindigkeit für die Einheit der Geschwindigkeiten annehmen will, so muß man für die Einheit der Räume nothwendig die doppelte Höhe nehmen, um sie hervorzubringen.

190.

Wir haben jetzt die Natur und die Eigenschaften der geradlinigten Bewegung untersucht; die krumlinigte Bewegung reducirt sich ganz natürlich auf zwey oder drey geradlinigte Bewegungen, je nachdem die durch das Bewegte beschriebene Curve einfache oder doppelte Krümmungen hat. In der That, wenn man diese Curve auf zwey oder drey rechtwinkelige Coordinaten x, y, z, bezieht, so ist es klar, daß für jeden Augenblick die Bestimmung des Punkts der Curve wo sich das Bewegte befindet, von dem Werthe dieser Coordinaten in demselben Augenblick abhängen wird; so daß jede dieser Coordinaten eine durch die Zeit gegebene Funktion ist, und den geradlinigten Raum vorstellen kann, den das Bewegte durchlaufen hat, welches die Projection des wahren Bewegten auf jeder der drey Axen derselben Coordinaten ist.

Also,

Alſo, wenn die Bewegung in einer Ebene geſchieht, ſo kann ſie durch die beyden Gleichungen

$$x = ft,\ y = Ft$$

vorgeſtellt werden, wo man, wenn t eliminirt wird, die Gleichung der durch das Bewegte durchlaufenen Linien in x und y hat. Wenn die Bewegung in verſchiedenen Ebenen geſchieht, ſo kann ſie alsdenn durch die drey Gleichungen

$$x = ft,\ y = Ft,\ z = \phi t,$$

vorgeſtellt werden, wo man, wenn t eliminirt wird, zwey Gleichungen in x, y, z, haben wird, welche die durch den Körper in doppelter Krümmung beſchriebene Linie beſtimmen.

191.

Wir wollen vorausſetzen, daß die drey, ſich auf Axen x, y, z, beziehenden Bewegungen gleichförmig ſo hat man

$$x = at,\ y = bt,\ z = ct,$$

wenn a, b, c, die Geſchwindigkeiten dieſer Bewegungen ſind. Wird t eliminirt, ſo hat man

$$y = \frac{bx}{a} \text{ und } z = \frac{cx}{a},$$

zwey Gleichungen, welche zu einer geraden Linie gehören, die durch den Urſprung der Coordinaten geht, und deren Projectionen auf den Ebenen der x,y und der x,z mit der Axe x, Winkel machen, davon die Tangenten

$$\frac{b}{a} \text{ und } \frac{c}{a}$$

ſind. Der Theil dieſer den Coordinaten y, z, henden geraden Linie wird alſo ſeyn

$$\sqrt{(x^2+y^2+z^2)} = t\sqrt{(a^2+b^2+c^2)};$$

dies

dies ist der, während der Zeit t kraft der drey gleichförmigen Bewegungen, beschriebene Raum. Diese zusammengesetzte Bewegung ist also auch geradlinigt und gleichförmig, und hat eine Geschwindigkeit gleich

$$\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Was ihre Richtung anbetrifft, so ist es weit einfacher sie auf die drey Axen der Coordinaten x, y, z, zu beziehen, und es ist sichtbar, daß, wenn

$$at,\ bt,\ ct,$$

die Projectionen der Linie

$$t\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$$

auf den drey Axen sind, die Verhältnisse

$$\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}},\ \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}},\ \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$$

die Cosinusse der Winkel seyn werden, den diese Richtung mit den nemlichen Axen macht. Die Summe der Quadrate von diesen Cosinussen ist, wie man sieht der Einheit gleich, welches die bekannte Eigenschaft der Winkel ist, die eine gerade mit drey andern unter sich senkrechten Linien machen.

192.

Wir wollen A die Geschwindigkeit der zusammengesetzten Bewegung, und α, β, γ, die Winkel nennen, welche die Richtung dieser Bewegung mit den drey Axen macht, so hat man

$$A = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)} \text{ und}$$

$$\frac{a}{A} = \cos.\,\alpha;\ \frac{b}{A} = \cos.\,\beta,\ \frac{c}{A} = \cos.\,\gamma;$$

woraus man zieht

$$a = A\cos.\alpha;\ b = A\cos.\beta;\ c = A\cos.\gamma.$$

Man

Man sieht hieraus wie die Geschwindigkeit A einer gleichförmigen Bewegung nach einer gegebenen Richtung, sich in drey Geschwindigkeiten a, b, c nach unter sich senkrechten Richtungen zerlegen kann.

Wenn also ein Körper mit einem male zwey Bewegungen nach gegebenen Richtungen hätte, und mit drey unter sich senkrechten Linien die respectiven Winkel α, β, γ, und λ, μ, ν machte, so würden hieraus, den nemlichen Axen gemäß, die zusammengesetzten Geschwindigkeiten

$$A\cos.\alpha + B\cos.\lambda, + A\cos.\beta + B\cos.\mu,$$
$$A\cos.\gamma + B\cos.\nu$$

entstehen; und diese Geschwindigkeiten würden eine einzige Geschwindigkeit C geben, mit einer Richtung, welche mit denselben Axen die Winkel $\varkappa, \varrho, \sigma$, macht, daß man hat

$$C\cos.\varkappa = A\cos.\alpha + B\cos.\lambda,$$
$$C\cos.\varrho = A\cos.\beta + B\cos.\mu,$$
$$C\cos.\sigma = A\cos.\gamma + B\cos.\nu.$$

Da die Linien

$$A\cos.\alpha, A\cos.\beta, A\cos.\gamma$$

die Projectionen auf den drey Axen der auf der Richtung der Geschwindigkeit A genommenen Linie A sind, und so mit andern ähnlichen Größen, so ist es leicht aus den vorhergehenden Gleichungen zu folgern, daß, wenn man die eine dieser beyden Linien A und B am Ende der andern anbringt und zwar jede nach ihrer eigenen Richtung, die Linie C diese Linien verbinden wird, so daß A, B, C, die drey Seiten eines Dreyecks werden; und, daß wenn man auf den beyden, von einem Punkt ausgehenden, Linien A und B ein Parallelegram construirt, die Linie C dessen Diagonale seyn wird. Auf diese Art reducirt sich die Zusammensetzung und Zerlegung der

Geschwin-

Geſchwindigkeiten auf einen ſehr einfache geometriſche Betrachtung; für den Calcul iſt es noch weit einfacher alles vermöge der vorhergehenden Formeln auf drey unter ſich ſenkrechte Axen zu beziehen, welche man zu ſo viel Geſchwindigkeit als man zuſammenſetzen ſoll, erweitern kann.

Wir bemerken noch, daß, wenn man den Winkel, welchen die beyden von einem Puukte ausgehenden geraden Linien A und B bilden △ nennt, das Quadrat der Linien die ſie verbindet, wie bekannt iſt, durch

$$A^2 - 2AB\cos.\triangle + B^2$$

ausgedrückt ſeyn wird. Anderſeits, wenn man die Projectionen dieſer Linien betrachtet, iſt es leicht zu ſehen, daß man daſſelbe Quadrat durch

$$(A\cos.\alpha - B\cos.\lambda)^2 + (A\cos.\beta - B\cos.\mu)^2 + (A\cos.\gamma - B\cos.\nu)^2 = (A^2 + B^2) - 2AB(\cos.\alpha\cos.\lambda + \cos.\beta\cos.\mu + \cos.\gamma\cos.\nu)$$

ausdrücken kann, woraus man, vermittelſt der Vergleichung

$$\cos.\triangle = \cos.\alpha\cos.\lambda + \cos.\beta\cos.\mu + \cos.\gamma\cos.\nu$$

eine Gleichung zieht, welche das Verhältniß zwiſchen dem Winkel △ der beyden Linien, und zwiſchen den Winkeln α, β, γ und λ, μ, ν welche dieſe Linien durch drey unter ſich ſenkrechten Linien bilden, anzeigt. Dieſe Relation iſt in der ſphäriſchen Trigonometrie bekannt; da wir aber in der Folge Gelegenheit finden, hiervon Gebrauch zu machen, ſo war es uns lieb ſie durch die Methode der Proportionen zu erweiſen.

193.

Die Betrachtung der gleichförmigen Bewegungen gab uns die Zuſammenſetzung und Zerlegung der Geſchwindig-

ſchwindigkeiten; die Betrachtung der gleichförmig beſchleunigten Bewegung wird uns eben ſo die Zuſammenſetzung und Zerlegung der Kräfte geben.

In der That, wenn wir vorausſetzen, daß die geradlinigten Bewegungen nach den Axen der Coordinaten x,y,z, gleichförmigt beſchleunigt und durch beſchleunigte Kräfte g, h, k hervorgebracht ſind, ſo wird man haben (Nr.189)

$$x = \tfrac{1}{2}gt^2,\ y = \tfrac{1}{2}ht^2,\ z = \tfrac{1}{2}kt^2.$$

Die Eliminirung von t giebt

$$y = \frac{hx}{g},\quad z = \frac{kx}{g},$$

woraus man ſieht, daß die vermöge dieſer Bewegungen beſchriegene Linie, auch eine gerade durch den Urſprung der Coordinaten gehende Linie iſt. Der Theil dieſer geraden Linie, welcher den Coordinaten x, y, z entſpricht iſt daher auch

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} =$$
$$\tfrac{1}{2}t^2\sqrt{(g^2 + h^2 + k^2)};$$

dieſes wird der durch die zuſammengeſetzte Bewegung während der Zeit t durchlaufene Raum ſeyn; woraus man ſieht, daß dieſe Bewegung auf gleichförmig beſchleunigt iſt und von einer beſchleunigenden Kraft gleich

$$\sqrt{(g^2 + h^2 + k^2)}$$

abhängt. Und da die Linien

$$\tfrac{1}{2}gt^2,\ \tfrac{1}{2}ht^2,\ \tfrac{1}{2}kt^2.$$

Die Projectionen der Linie.

$$\tfrac{1}{2}t^2\sqrt{(g^2 + h^2 + k^2)}$$

auf den drey Axen ſind, ſo werden die Verhältniſſe

$$\frac{g}{\sqrt{(g^2 + h^2 + k^2)}},\ \frac{h}{\sqrt{(g^2+h^2+k^2)}},\ \frac{k}{\sqrt{(g^2+h^2+k^2)}},$$

die Coſinuſſe der Winkel ſeyn, welche die Richtung der zuſammengeſetzten Bewegung mit der nemlichen Axe macht.

Man

Man sieht hieraus, daß die Zusammensetzung der gleichförmig beschleunigten Bewegungen die nemlichen Regeln als die der gleichförmigen Bewegungen befolgen, und daß daher die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte auf dieselbe Art geschieht als die der Geschwindigkeiten, so daß die in der vorhergehenden Nummer gefundenen Formeln, sich ebenfalls auf beschleunigende Kräfte anwenden lassen, indem man bloß die Kräfte an die Stelle der Geschwindigkeiten substituirt.

Wenn also ein bewegter Körper auf einmal durch zwey Kräfte G und H solicitirt wird nach gegebenen Richtungen, deren Winkel mit drey unter sich senkrechten Linien respective α, β, γ und λ, μ, ν sind, so entstehen daraus nach den Richtungen der drey Axen die zusammengesetzten Kräfte

$$G\cos.\alpha + H\cos.\lambda,$$
$$G\cos.\beta + H\cos.\mu,$$
$$G\cos.\gamma + H\cos.\nu;$$

und wenn K die einzige aus diesem hervorgehende Kraft ist, wenn man die Winkel welche ihre Richtung mit denselben Axen macht $\varkappa$, ϱ, σ nennt, so hat man die Gleichungen

$$K\cos.\varkappa = G\cos.\alpha + H\cos.\lambda$$
$$K\cos.\varrho = G\cos.\beta + H\cos.\mu$$
$$K\cos.\sigma = G\cos.\gamma + H\cos.\nu.$$

194.

Wenn die Bewegungen, nach den Axen der Coordinaten, aus gleichförmigen und gleichförmig beschleunigten zusammengesetzt wären, so daß man

$$x = at + \tfrac{1}{2}gt^2,\quad y = bt + \tfrac{1}{2}ht^2,\quad z = ct + \tfrac{1}{2}kt^2,$$

hätte; alsdenn wird die vermöge dieser Bewegungen be-

ſchriebene Linie nicht mehr gerade ſeyn, ſondern ſie würde nur in einer nemlichen durch den Urſprung der Coordinaten gehende Ebene ſeyn, denn, wenn man aus den drey Gleichungen t und t^n eliminirt, ſo hätte man eine Gleichung von der Form

$$lx + my + nz = o.$$

Man kann aber die drey gleichförmigen und die drey gleichförmig beſchleunigten Bewegungen beſonders zuſammenſetzen; und es würde hieraus eine aus einer einfachen gleichförmigen Bewegung nach einer gegebenen Richtuug gehende, und einer einfachen gleichförmig beſchleunigten nach einer andern gegebenen Richtung gehende, zuſammengeſetzte Bewegung entſtehen.

Die Natur ſtellt uns auch die Combination dieſer Bewegungen in den ſchief gegen den Horizont geworfenen Körpern (projectiles) vor, wenn man von dem Widerſtande der Luft abſtrahirt. Die gleichförmige Bewegung, als Wirkung der eingeprägten Geſchwindigkeit, pflanzt ſich in gerader Linie fort, als wenn ſie allein wäre; und die gleichförmig beſchleunigte Bewegung, als Wirkung von der Schwerkraft des Körpers pflanzt ſich auch ſenkrecht von oben bis unten fort, als wenn ſie einzig in dem Bewegten wäre, ſo daß am Ende irgend einer Zeit, der Körper ſich an demſelben Punkt befinden wird, wo er ſeyn würde, wenn dieſe beyden Bewegungen ſucceſſive und von einander unabhängig würkten; nnd jeden Augenblick hat der Körper die Geſchwindigkeit der gleichförmigen und die Geſchwindigkeit der gleichförmig beſchleunigten Bewegung zugleich, und aus dieſen beyden nach verſchiedenen Richtungen gehenden Geſchwindigkeiten iſt die Geſchwindigkeit des geworfenen Körpers zuſammengeſetzt.

Es ſey H die Höhe von welcher ein Körper fallen müßte um die Geſchwindigkeit mit welcher der geworfene Körper ſchief gegen den Horizont geworfen iſt zu erlangen, ſo iſt dieſe Geſchwindigkeit durch $\sqrt{2H}$ ausgedrückt, wenn man die beſchleunigende Kraft der Schwere zur Einheit annimmt. (Nr. 189). Hieraus, wenn man die Abſciſſen x horizontal und in der Ebene der Projectionslinie nimmt, und die Ordinaten y vertinal und von oben nach unten gezogen, ferner wenn man die Neigung der Projectionslinie gegen den Horizont α nennt, ſo wird man

$$\sqrt{(2H\cos.\alpha)} \text{ und } \sqrt{(2H\sin.\alpha)}$$

für die horizontalen und verticalen Geſchwindigkeiten haben. Alſo werden die Ausdrückungen von x und y

$$x = t\sqrt{(2H\cos.\alpha)} \text{ und } t\sqrt{(2H\sin.\alpha - \tfrac{1}{2}t^2)},$$

weil die Richtung der Schwere der Richtung der Ordinaten y entgegengeſetzt iſt, ſo muß das Glied $\frac{1}{2}t^2$ welches der Beſchleunigung der Schwerekraft zugehört negativ genommen werdn. Wenn aus dieſen Gleichungen t eliminirt wird, ſo hat man

$$y = x\,\text{tang.}\,\alpha - \frac{x^2}{4H\cos.\alpha^2},$$

eine Gleichung von einer Parabel, woraus man die bekannten Eigenſchaften von der Bahn des geworfenen Körpers im leeren Raume herleiten konnte; es iſt aber hier der Ort nicht ſich hier in dieſem Detail einzulaſſen.

195.

Wir wollen jetzt eine beliebige Bewegung betrachten, und annehmen, daß die Coordinaten x, y, z, der durch das Bewegte beſchriebenen Curve, gegebenen Funktion der Zeit t wären, wie in Nr. 190. In irgend einem Augen-

blick am Ende der Zeit t, wird der Körper nach der Richtuug der Axe der xe die Geschwindigkeit x' und die beschleunigende Kraft x'' erlangt haben (Nr. 189); er wird gleichfalls nach der Richtung der Axe der ys die Geschwindigkeit y' und die beschleunigende Kraft y''; und nach der Richtung der Axe der zs die Geschwindigkeit z' und die beschleunigende Kraft z'' erlangt haben. Also geben die drey Geschwindigkeiten x', y', z', die zusammengesetzte Geschwindigkeit

$$\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}$$

welche wir u nennen wollen, deren Richtung mit den drey Axen die Winkel machen wird, wozu die Cosinusse

$$\frac{x'}{u}, \quad \frac{y'}{u}, \quad \frac{z'}{u}$$

gehören, dergestalt, daß wenn diese Winkeit α, β, γ, genannt werden, man hat

$$x' = u\cos.\alpha, \quad y' = u\cos.\beta, \quad z' = u\cos.\gamma;$$

dieses geht aus der Theorie von Nr. 188 verbunden mit der von Nr. 191 hervor.

Wir bemerken hier zuerst, daß der Ausdruck der Geschwindigkeit u des Bewegten der nemliche ist, als der von der Erstenfunktion von dem Bogen der durchlaufenen Curve (Nr. 144); so daß, wenn man ganz allgemein den durch den Körper durchlaufenen krumlinigten Raum s nennt, und ihn als eine Funktion der Zeit ansieht, man s' für die reelle Geschwindigkeit des Bewegten haben wird, eben so, als wenn die Bewegung geradlinit wäre. Wir bemerken ferner, daß die Richtung dieser Geschwindigkeit die nemliche seyn wird, als die von der Tangente der Curve; denn man sieht aus den Formeln von Nr. 140 daß y' und z' die Tangenten der Winkel sind, welche die Tangenten der auf der Ebene

der

er xe und ys und auf der Ebene der xe und zs ent-
orfenen Curve mit der Axe der xe macht; da aber in
iesen Formeln y und z als Fnnktionen von x voraus-
esetzt sind, so muß man, um sie auf Fälle anzuwenden
o x, y, z als Funktionen einer dritten veränderlichen
röße t vorausgesetzt sind, nach der Bemerkung von
r. 63

$$\frac{y'}{x'} \text{ und } \frac{z'}{x'}$$

n die Stelle von y' und z' substituiren, dergestalt daß
ie in redestehenden Winkel durch

$$\frac{y'}{x'} \text{ und } \frac{z'}{x'}$$

usgedrückt seyn werden; diese Winkel sind also dieselen als die der Projektion auf den Ebenen derjenigen nie, welche die aus den drey Geschwindigkeiten x', y', z' sammengesetzte Geschwindigkeit beschreiben würde; mithin fft diese Linie mit der Tangente der Curve zusammen. ieraus folgt, daß, wenn die Ursachen, welche die geidlinigte und gleichförmige Bewegung stöhren, plötzlich irgend einem Augenblickzu wirken aufhörten, das Begte alsdann seine Bewegung nach der Tangente fortzen würde, mit einer Geschwindigkeit welche der Enfunktion des beschriebenen Bogens gleich ist.

196.

Die drey beschleunigenden Kräfte x'', y'', z'' geben
en so (Nr. 188 und 193) eine einzige durch

$$\sqrt{(x''^2 + y''^2 + z''^2)}$$

usgedrückte Kraft, welche wir P nennen wollen, und eren Richtnng mit den drey Axen der Coordinaten

x, y, z Winkel machen werden, wozu die Cosinuſſe

$$\frac{x''}{P}, \quad \frac{y''}{P}, \quad \frac{z''}{P}$$

gehören, ſo daß man, wenn dieſe Winkel λ, μ, ν genannt werden, hat

$$x'' = P\cos.\lambda, \quad y'' = P\cos.\mu, \quad z'' = P\cos.\nu.$$

Wenn man alſo das Geſetz der Bewegung des Körpers, das heißt die Werthe von x, y, z, in t kennt, ſo kann man durch dieſe Gleichungen die beſchleunigende Kraft und ihre Richtung für jeden Augenblick finden; und umgekehrt, wenn man die Kraft P mit den Winkeln λ, μ, ν kennt, ſo wird man drey Gleichungen von der zweyten Ordnung haben, welche dazu dienen x, y, und z zu beſtimmen. Die Probleme der erſten Art hängen nur von der directen Analyſis der Funktionen ab, und ſind folglich immer auflösbar. Die der zweyten Art hängen von der umgekehrten Analyſis der Funktionen ab, und ſind allen Schwierigkeiten dieſer Analyſis unterworfen.

Wenn das Bewegte mit einmal durch zwey beſchleunigende Kräfte P und Q nach Richtungen ſolicitirt würde, welche mit den Axen der xe, ys, zs die Winkel λ, μ, ν für die Kraft P, und ϖ, ϱ, σ für die Kraft Q machte, ſo hätte man nach den Formeln der citirten Nummer

$$x'' = P\cos.\lambda + Q\cos.\varpi,$$
$$y'' = P\cos.\mu + Q\cos.\varrho,$$
$$z'' = P\cos.\nu + Q\cos.\sigma;$$

und ſo weiter, für jede beliebige Anzahl von Kräften.

197.

Wir wollen vorausſetzen, daß die Richtungen der Kräfte P, Q mit der Tangente der Curve die Winkel

Δ, Γ machten, ſo wird man, da in den Formeln von Nr. 195 die Winkel α, β, γ mit denen von der Tangente mit den drey Axen einerley ſind, nach der am Ende von Nr. 192 gefundenen Formel

$$\text{Cof}\,\Delta = \text{cof.}\,\alpha\,\text{cof.}\,\lambda + \text{cof.}\,\beta\,\text{cof.}\,\mu + \text{cof.}\,\gamma\,\text{cof.}\,\nu,$$

haben, und eben ſo

$$\text{Cof.}\,\Gamma\,\text{cof.}\,\alpha\,\text{cof.}\,\pi + \text{cof.}\,\beta\,\text{cof.}\,\varrho + \text{cof.}\,\gamma\,\text{cof.}\,\sigma.$$

Wenn alſo die drey letzten Gleichungen der vorhergehenden Nummer durch cof. α, cof. β, cof. γ multiplicirt und zuſammen addiret werden, ſo hat man

$$x''\,\text{cof.}\,\alpha + y''\,\text{cof.}\,\beta + z''\,\text{cof.}\,\gamma = P\,\text{cof.}\,\Delta + Q\,\text{cof.}\,\Gamma.$$

Wenn man für cof. α, cof. β, cof. γ ihre Werthe

$$\frac{x'}{u},\ \frac{y'}{u},\ \frac{z'}{u}$$

(Nr. 195) ſetzt, und bemerkt, daß

$$\frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}}$$

die Erſtenfunktion von

$$\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}$$

iſt, das heißt von s', und daß folglich dieſe Größe gleich s'' iſt, ſo hat man die Gleichung

$$s'' = P\,\text{cof.}\,\Delta + Q\,\text{cof.}\,\Gamma,$$

welche wie man ſieht, den Gleichungen von der geradlinigten Bewegung nach den drey Axen ähnlich iſt.

Dieſe Gleichung dient dazu, direct die reellen Geſchwindigkeit des Körpers, welche durch s' ausgedrückt iſt, zu finden; und man ſieht, daß die ſenkrechten Kräfte auf der Tangente keinen Einfluß auf die Geſchwindigkeit haben, weil die Winkel Δ, Γ alsdann rechte ſind, ſo werden ihre Coſinuſſe Null, welches die von dieſen Kräften in dem Ausdruck von s'' abhängigen Glieder zerſtört.

Woraus man ganz allgemein schließen kann, daß, wenn ein Körper gezwungen ist sich in einen Canal von einer gegebenen Figur zu bewegen, (da die Wirkung der Seitenwände des Canals auf den Körper sich nicht anders als senkrecht auf den Canal selbst äußern kann) die Geschwindigkeit des Körpers keinesweges durch diese Wirkung alterirt werden kann.

Im Gegentheil, die Kräfte welche nach der Richtung der Tangente wirken, üben auf die Geschwindigkeit ihre volle und ganze Wirkung aus, als wenn die Bewegung des Körpers geradlinigt wäre; weil die Winkel Δ, r für diese Kräfte Null werden, so sind ihre Cosinusse der Einheit gleich.

198.

Die Schweerkraft und alle bekannten Kräfte der Attraction wirken auf alle materielle Theile der Körper gleich stark, und bringen darin alle einerley Bewegung hervor, wenn man von der Ungleichheit der Kräfte in Verhältniß der Distanzen abstrahirt; dergestalt, daß der Effekt von der Thätigkeit dieser Kräfte unabhängig von der Masse des bewegten Körpers, und in Absicht auf die eingepflanzte Geschwindigkeit derselbe ist, als wenn die Masse auf einen Punkt reducirt wäre. Bey der gegenseitigen Attraction der Körper ist die anziehende Kraft, der Masse des anziehenden Körpers proportional, weil jeder seiner Theilchen gleich stark anzieht; folglich ist, die dem angezogenen Körper eingepflanzte absolute Bewegung nur der Masse des anziehenden Körpers proportional.

Es verhält sich nicht auf eben die Art mit denen Kräften, welche nicht in das Innere der Körper eindringen,

bringen, und welche nur auf das äußere wirken, als zum Beispiel mit der Wirkung der Federn, mit der Wirkung von dem Widerstande der Flüßigkeiten, mit den durch Druck hervorgebrachten Kräften, mit der Anspannung der Fäden u. s. w. Es ist klar, daß diese Kräfte nicht einerley Effect auf verschiedene Körper hervorbringen können, wenn hier nicht wenigstens ihre Massen proportional sind; denn wenn zum Beispiel eine doppelte Kraft auf einen Körper von doppelter Masse wirkt, so ist es einerley als ob zwey einfache Kräfte jede für sich auf zwei einfache Massen wirken; es ist auch klar daß der durch verschiedene Kräfte auf eine einzige oder auf gleiche Massen hervorgebrachte Effect, das heißt, die Bewegung oder die eingepflanzte Geschwindigkeit, den Kräften proportional seyn muß; wenn also eine, auf die Masse M wirkende Kraft F, derselben die Geschwindigkeit V einpflanzt; so wird auch noch, eine Kraft $m F$ die auf die Masse $m M$ wirkt, derhalben die Geschwindigkeit V einpflanzen; aber die auf dieselbe Masse M wirkende Kraft $m F$ wird ihr die Geschwindigkeit $m V$ mittheilen: also theilt einerley Kraft $m F$ der Masse $m M$ die Geschwindigkeit V, und der Masse M die Geschwindigkeit $m V$ mit; woraus folgt, daß die durch einerley Kraft verschiedenen Massen eingepflanzte Geschwindigkeiten, im umgekehrten Verhältniß der Massen sind. Mithin ist ganz allgemein, der Effect einer gegebenen Kraft auf einer gegebenen Masse, in directen Verhältniß der Kraft und in umgekehrten Verhältniß der Masse, oder wie die Kraft dividirt durch die Masse.

Dieses Princip ist durch die Erfahrung bestätigt; denn eine zwischen zwey Körpern angebrachte, und auf beyden gleich wirkende Feder, theilt ihnen Geschwindig-

keiten mit, die sich umgekehrt wie ihre Massen verhalten. Wenn zwei harte bewegte Körper sich auf einer und eben derselben Linie begegnen, und mit Geschwindigkeiten die sich umgekehrt wie ihre Massen verhalten, gegen einander stoßen, so werden sie nach dem Stoß durch die gegenseitige Zernichtung ihrer Bewegung, aufgehalten werden; und wenn sie vollkommen elastisch sind, so prallen sie jeder mit derselben Geschwindigkeit die ervor dem Stoß hatte, zurück.

Da die Schwerkraft auf alle Theile von der Masse eines Körpers wirkt, so ist bei schweren Körpern seine absolute Wirkung der Masse proportional; also wird, wenn man diese Wirkung dnrch die Masse dividirt, der Effect der Schwere den Körpern eine Bewegung mitzutheilen, von ihrer Masse unabhängig, und ist für alle Körper die nemliche. Aber wenn zwey schwere Körper sich durch einen über einer Rolle gehenden Faden erhalten, (da die Kräfte, welche aus ihrer Schwere entstehen, und den Massen proportional sind, den Faden in entgegengesetzter Richtung ziehen) so ist es nur die Verschiedenheit dieser Kräfte, welche ihnen eine Bewegung mittheilen könnte, und da die beiden Körper sich zugleich mit einander bewegen und in einerlei Zeit gleichen verticalen Ranm durchlaufen müssen, so ist die tatale zu bewegende Masse der Summe der Massen gleich; also vermindert sich die Wirkung der Schwerkraft um diese Körper zu bewegen, im Verhältniß des Unterschiedes der Massen zu ihrer Summe; mithin werden sich die am Ende irgend einer Zeit durchlaufenen Räume eben so verhalten wie die eines schweren Körpers welcher frey herunterfällt. Dies bestätigt auch die Erfahrung bey der bekannten Maschine welche die Gesetze von der Beschleunigung der schweren Körper zeigt.

199.

199.

Es geht aus dem Princip welches wir so eben auseinandergesetzt haben hervor, daß die beschleunigten Kräfte eines Körpers nach den absoluten Werthen in Absicht der Kräfte welche auf den Körper würken, dividirt durch die Masse selbst des Körpers, geschätzt werden müssen. Wenn also P, Q, u. s. w. die absoluten Werthe der Kräfte ausdrücken, welche auf einen Körper dessen Masse M ist würken, nach den Richtungen welche mit den Axen der Coordinaten x, y, z, die Winkel λ, μ, ν für die Kraft P, und die Winkel ϖ, ϱ, σ für die Kraft Q machen, und so weiter, so müßte man in den Formeln von no. 196 überall

$$\frac{P}{M}, \frac{Q}{M} \text{ u. s. w.}$$

an die Stelle von P, Q u. s. w. setzen, oder, was auf eins herauskömmt, die Größen x'', y'', z'', mit M multipliciren. Auf diese Art hat man also für die Gleichungen von der Bewegung des Körpers M, der durch die Kräfte P, Q, u. s. w. getrieben wird die Gleichungen

$$M x'' = P \cos. \lambda + Q \cos. \varpi + \text{u. s. w.}$$
$$M y'' = P \cos. \mu + Q \cos. \varrho + \text{u. s. w.}$$
$$M z'' = P \cos. \nu + Q \cos. \sigma + \text{u. s. w.}$$

Wenn sich Körper wechselseitig anziehen, so folgt daß, da man sich die Attraktion von allen Theilen der anziehenden Masse kommend, und auf alle Theile der angezogenen Masse würkend vorstellt, die absoluten Werthe von der Attraction zwischen beiden Körpern dem Product aus ihren Massen proportional seyn muß.

200.

In diesen Gleichungen sind die Coordinaten x, y, z

als

als Funktionen der Zeit t anzusehen. Um die Gleichungen von der durch den Körper beschriebenen Curve zu haben, so müßte man die Zeit eliminiren und die Coordinaten y und z auf einfache Funktionen von x reduciren. Hier der Geist und der Grund dieser Reduction:

Wenn man die Größen x, y, z als Funktionen der Zeit t betrachtet, so werden, wenn $t = \tau + \vartheta$ wird, diese Größen

$$x + \vartheta x' + \frac{\vartheta^2}{2} x'' + \frac{\vartheta^3}{2.3} x''', \text{ u. s. w.}$$

$$y + \vartheta y' + \frac{\vartheta^2}{2} y'' + \frac{\vartheta^3}{2.3} y''', \text{ u. s. w.}$$

$$z + \vartheta z + \frac{\vartheta^2}{2} z'' + \frac{\vartheta^3}{2.3} z''', \text{ u. s. w.}$$

nach dem im ersten Theile festgestellte Principien von der Entwicklung der Funktionen. Wenn man anderseits y und z als Funktionen von x betrachtet, werden, wenn x sich in $x + i$ verwandelt diese nemlichen Größen

$$y + i(y') + \frac{i^2}{2}(y'') \frac{i^3}{2.3}(y''') + \text{u. s. w.}$$

$$z + i(z') + \frac{i^2}{2}(z'') + \frac{i^3}{2.3}(z''') + \text{u. s. w.}$$

Ich schließe hier die Größen y', y'' u. s. w. z', z'' u. s. w. in Parentheſen ein, um sie von den nemlichen sich auf die erste Hypotheſe beziehenden Größen zu unterscheiden.

Also, wenn man

$$i = \vartheta x' + \frac{\vartheta^2}{2} x'' + \frac{\vartheta^3}{2.3} x''' \text{ u. s. w.}$$

macht, so muß man, für jeden Werth von ϑ, die Gleichung

$i(y') +$

$$i(y') + \frac{i^2}{2}(y'') + \frac{i^3}{2.3}(y''') + \text{u. f. w.} =$$

$$\delta y' + \frac{\delta^2}{2}(y'') + \frac{\delta^3}{2.3}(y''') + \text{u. f. w.}$$

haben, und eben ſo

$$i(z') + \frac{i^2}{2}(z'') + \frac{i^3}{2.3}(z''') + \text{u. f. w.}$$

$$\delta z' + \frac{\delta^2}{2}(z'') + \frac{\delta^3}{2.3}(z''') + \text{u. f. w.}$$

Wird der Werth von i ſubſtituirt, und die mit der, ſelben Potenz von φ behafteten Glieder miteinander verglichen, ſo giebt die erſte Gleichung

$$y' = (y')\,x',$$
$$y'' = (y')\,x'' + (y'')\,x'^2;$$
$$y''' = (y')\,x''' + 3(y'')x'x'' + (y''')x'^3;$$

und ſo ferner. Woraus man zieht

$$(y) = \frac{y'}{x'},$$

$$(y'') = \frac{y'' - (y')\,x''}{x'^2} = \frac{y''}{x'^2} - \frac{y'\,x''}{x'^3}$$

$$(x''') = \frac{y''' - (y')\,x''' - 3(y'')\,x'x''}{x'^3} =$$

$$\frac{y'''}{x'^3} - \frac{y'\,x'''}{x'^4} + \frac{3y''\,x''}{x'^4} + \frac{3y'\,x''^2}{x'^5}$$

und ſo weiter. Und durch die zweyte Gleichung hat man ähnliche Formeln für (z'), (z''), u. ſ. w.
indem man blos den Buchſtaben y in z verändert.

Dieſe Formeln ſtimmen mit denen überein, welche wir auf eine andere Art im erſten Theile (no. 63.) gefunden haben, denn man ſieht daß

$$(y') = \frac{y'}{x'}.$$

(y'')—

$$(y'') = \frac{\left(\frac{y'}{x'}\right)'}{x'}; \text{ u. ſ. w.}$$

Die vorhergehende Analyſis iſt mehr direct, und geht aus den erſten Principien der Sache hervor; aber die in der angeführten Nummer hat den Vorzug daß ſie das Geſetz der Progreſſion zeigt, denn ſie giebt unmittelbar

$$(y') = \frac{x'}{y'},$$

$$(y'') = \frac{[(y')]'}{x},$$

$$(y''') = \frac{[(y'')]'}{x'}; \text{ u. ſ. f.}$$

indem man durch den an den Parentheſen angebrachten Strich, die Erſtefunktion, der zwiſchen den Parentheſen enthaltenen Größen, bezeichnet.

Vermittelſt dieſer Formeln, könnte man die Gleichungen welche die abgeleiteten Funktionen x', x'', u. ſ. w. y', y'', u. ſ. w. z', z'', u. ſ. w. in Beziehung auf t, enthalten, in andern Gleichungen transformiren worin ſich nur die abgeleiteten Funktionen (y'), (y''), u. ſ. w. (z'), (z''), u. ſ. w. in Beziehung auf x befinden.

201.

Um hiervon ein Beiſpiel zu geben, wollen wir annehmen, daß man nach den Widerſtand des Mittels fragte, kraft welches ein in dieſem Mittel geworfener Körper eine gegebene Curve beſchreiben würde. Man betrachtet den Widerſtand wie eine verzögernde Kraft welche in der Richtung des Körpers ſelbſt würkt, das heißt in der Richtung der Tanzente dieſer Curve, alſo, wenn man den

Widerstand r nennt, das heißt, die Würkung des Mittels welches auf der Oberfläche des Körpers widersteht dividirt durch die Masse des Körpers selbst, so wird man

$$-r\cos.\alpha,\ -r\cos.\beta,\ -r\cos.\gamma.$$

für die beschleunigenden Kräfte haben, welche hieraus nach den Richtungen der Axen der xe, ys und zs entspringen, die Winkel α, β, γ sind die, welche die Tangente mit diesen Axen macht. Ferner, wenn man die beschleunigte Kraft der Schwere g nennt, und die Coordinaten y vertical und von unten nach oben gezogen annimmt, so hat man $-g$ für die beschleunigende Kraft, die von der Schwere nach der Richtung der Ordinaten y herrührt.

Die Gleichungen von der Bewegung werden also

$$x'' = -r\cos.\alpha,$$
$$y'' = -g - r\cos.\beta,$$
$$z'' = -r\cos.\gamma:$$

substituirt man für $\cos.\alpha$, $\cos.\beta$, $\cos.\gamma$, ihre Werthe

$$\frac{x'}{u},\ \frac{y'}{u},\ \frac{z'}{u} \quad (195)$$

oder u, die Geschwindigkeit des Körpers ist $=$

$$s' = \sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)},$$

so hat man diese

$$x'' = -\frac{rx'}{u},$$

$$y'' = -g - \frac{ry'}{u}$$

$$z'' = -\frac{rz'}{u}.$$

Die erste und die letzte geben

$$\frac{x''}{x'} = \frac{z''}{z'}$$

woraus man, wenn man hiervon die ursprüngliche Funk-

tion

tionen nimt, zieht

$$z = x + n,$$

wo m und n willkührliche beständige Größen bedeuten. Dieſe Gleichung, welche die einer verticalne Ebne iſt, zeigt daß die Curve nothwendig ganz in dieſer Ebnee liegt: ſo daß man, wenn man die Axe der xe in der nemlichen Ebne nimmt,

$$z = 0 \text{ und } z' = 0$$

haben wird, und die Gleichungen der Curve reduciren ſich auf die beyden erſten.

Wir wollen der Kürze wegen

$$\frac{r}{u} = q$$

ſetzen, ſo hat man

$$x'' = -px',$$
$$y'' = -g - qy';$$

wenn man dieſe Werthe in dem Ausdruck von (y'') in no. 200 ſubſtituirt, ſo wird man

$$(y'') = -\frac{g}{x'^2}$$

haben; mithin hängt der Werth von q von (q'') ab. Denn man hat aus derſelben Nummer.

$$(y''') = \frac{y'''}{x'^3} - \frac{y'x'''}{x'^4} - \frac{3(y'')x''}{x'^2};$$

wenn man aber die Werthe von x'' oder q'' hat, ſo braucht man nur ihre erſten Funktionen zu nehmen um den Werth von x''' von y''' haben; und man wird, indem man durch q' die Erſtefunktion von q bezeichnet,

$$x''' = -qx'' - q'x' = (q^2 + q')x',$$
$$y''' \quad qy'' - q'y' = qg + (q^2 + q')y'$$

finden. Alſo geben die beyden erſten Glieder des Werths von (y''')

$$\frac{qg}{x'^3}$$

ıd das Glied

$$-\frac{3(y'')x'}{x'^2}$$

ebt

$$-\frac{3qg}{x'^3}$$

So daß man

$$(y''') = -\frac{2qg}{x'^3}$$

ıt; denn da $q = \frac{1}{\sqrt{(x'^2+y'^2)}}$

, ſo kann man dieſe Subſtitution machen, und nach nander x' u. y' vermittelſt der Gleichungen

$$(y') = \frac{y'}{x'} \text{ und } (y'') = -\frac{g}{x'^2}$$

nausſchaffen, welches geben wird

$$x'^3\sqrt{(x'^2+y'^2)} = +\sqrt{[1+(y')^2]^4} = \frac{g^2\sqrt{[1+(y')^2]^4}}{(y'')^2};$$

ɪrgeſtallt daß man nach allen Subſtitutionen hat

$$(y''') = -\frac{2\sqrt{(y')^2}}{g\sqrt{[1+(y')^2]}}.$$

Da die abgeleiteten Funktionen

$$(y'), (y'') \text{ und } (y''')$$

ch auf die veränderliche Größe x beziehen, ſo können ir ſie bloß durch y', y'', y''' vorſtellen, und man wird

$$\frac{x}{g} = -\frac{y'''\sqrt{(1+y'^2)}}{2y''^2}$$

äben.

Denn, da die Curve gegeben ist, so hat man y in der Funktion von x: hieraus zieht man die abgeleiteten Funktionen y', y'', y'''; und die vorhergehende Formel wird für jeden Punkt der Curve, das Verhältniß des Widerstandes zur Schweere geben.

Die Geschwindigkeit u wird

$$= \sqrt{(x'^2 + y'^2)} = x' \sqrt{[1 + (y'^2)]} = \frac{\sqrt{g} \cdot \sqrt{[1 + (y'^2)]}}{\sqrt{-(y'')}},$$

das heißt, wenn man (y') in y' verändert

$$u = \frac{\sqrt{g} \cdot \sqrt{(1 + y'^2)}}{\sqrt{-y''}} = s'.$$

Wenn man annimt, daß der Widerstand den Quadraten der Geschwindigkeit und der Dichtigkeit des Mittels proportional ist, so wird, wenn man diese Dichtigkeit in irgend einen Ort Δ nennt,

$$r = Mu^2\Delta,$$

wo m ein beständiger Coeffizient ist; also wird, indem man den Werth von

$$u, r = \frac{mg(1 + y'.)\Delta}{-y''}.$$

subsistituirt und diesen Werth in der oben stehenden Gleichung setzt,

$$m\Delta = \frac{y'''}{2y''\sqrt{(1 + y'^2)}},$$

woraus man die Dichtigkeit des nöthigen Mittels bestimmen kann, um die gegebene Curve beschreiben zu können. Umgekehrt, wird diese Gleichung dienen die Curve zu bestimmen, wenn die Dichtigkeit des Mittels gegeben ist.

Für die in der Luft geworfenen Körper (projectiles) kann man die Dichtigkeit des Mittels als beständig annehmen; also wird, wenn man mehrerer Einfachheit wegen

$2m\Delta =$

$$2m\Delta = \frac{1}{k}$$

nacht, die Gleichung der Curve

$$\frac{y'''}{y''} = k\sqrt{(1+y'^2)} = Ks'$$

yn, wo s den Bogen der Curve andeutet, woraus man, enn hievon die urſprünglichen Funtionen genommen erden,

$$y'' = Ae^{ks}$$

eht, wo A eine willkührliche beſtändige Größe iſt: dieß iſt die ler einfachſte Form unter welcher die Gleichung dieſer Curve bracht werden kann. Man kann aus dieſen Gleichun n die verſchiedenen Näherungen ziehen, welche bisher r die Beſtimmung der durch die Kugeln und Bomben ſchriebenen Curve gegeben ſind; aber die Gränzen dieſes erks verhindern, uns über dieſen Gegenſtand in irgend nen Detail einzulaſſen.

262.

Endlich bemerken wir noch, daß man durch die Eli rung der Zeit, ſogleich die Gleichung der Curve aus n Gleichungen der Bewegung

$$x'' = -\frac{rx'}{s'},$$

$$y'' = -\frac{ry'}{s'},$$

itte ziehen können. In der That, da x und y Funcki ien der Zeie t ſind, ſo kann man umgekehrt y und t s Funcktionen von x anſehen; und nach den Princi en von no. 63, wenn man ganz allgemein x, y, t als unktionen irgend einer andern veränderlichen Größe

z betrachtet, muß man

$$\frac{x'}{t'} \text{ und } \frac{y'}{t'}$$

an die Stelle von x' und y' und

$$\frac{\left(\frac{x'}{t}\right)'}{t'}, \quad \frac{\left(\frac{y'}{t}\right)'}{t'}.$$

an die Stelle von x'', y'' ſubſtituiren; wenn aber x der Stelle von z geſetzt wird, ſo wird man haben x' = 1 macht man alſo in dieſen Formeln

$$x' = 1$$

ſo muß man

$$\frac{1}{t'} \text{ und } \frac{y'}{t'}$$

an die Stelle von x' und y', und

$$-\frac{t''}{t'^3} \text{ und } \frac{y''}{t'^2} - \frac{y' t''}{t'^3}$$

an der Stelle von x'' und y'' ſubſtituiren.

Die beyden Gleichungen werden alſo, wegen,

$$s' = \sqrt{(x'^2 + y'^2)},$$

$$-\frac{t''}{t'^3} = -\frac{r}{\sqrt{(1+y'^2)}} \text{ und}$$

$$\frac{y''}{t'^2} - \frac{y' t''}{t'^3} = -g - \frac{r y'}{\sqrt{(1+y'^2)}},$$

woraus man die Funktion t' eliminiren muß. Subſtitu man in dieſer zweyten Gleichung den aus der er Gleichung gezogenen Werth

$$\frac{t''}{t'^3},$$

ſo wird ſie

$$\frac{y''}{t'^2} = -g;$$

durch y'' dividirt, und von beyden Seiten die Erſtefunktionen genommen, giebt

$$-\frac{2t''}{t^3} = \frac{gy'''}{y''^2}$$

ein Werth welcher nachdem er in der erſten Gleichung ſubſtituirt wird, eben ſo wie weiter oben

$$\frac{r}{g} = -\frac{y'''\sqrt{(1+y'^2)}}{2y''^2}$$

geben wird. Was die Geſchwindigkeit

$$u = s' = \sqrt{(x'^2+y'^2)}$$

anbetrift, ſo wird ſie

$$\frac{\sqrt{(1+y'^2)}}{t'};$$

und da man ſie oben

$$t' = \sqrt{-\frac{y''}{g}}$$

gefunden hat, ſo wird die Geſchwindigkeit

$$\frac{\sqrt{g}\cdot\sqrt{(1+y'^2}}{\sqrt{(-y''}},$$

wie oben.

Auf dieſe Art kann man immer die Zeit, aus den Gleichungen der Bewegung, eliminiren, um auf der Stelle die Gleichungen der beſchriebenen Curve zu haben; und wir hätten ſogleich Gebrauch davon machen können: aber die Analyſis welche wir gegeben haben, wird uns nöthig ſeyn die wahre Quelle des Verſehens zu entdecken, worin Newton bey der erſten Ausgabe der Principien gefallen iſt, wie wir ſchon im Anfange dies Werks geſagt haben; indem er das Problem womit wir uns jetzt beſchäfftiget haben, und welches das dritte im zweiten Buch dieſes Werks iſt, wie folgt auflöſt.

203.

Hier ist die erste Auflösung von Newton, auf Analysis gebracht (Werke des Johann Bernoulli, erster Theil Seite 481). Das Bewegte welches zu irgend einem Punkt der Curve gekommen ist, wird ohne den Widerstand und Schwere in einer sehr kleinen Zeit einen sehr kleinen Theil der Tangente beschrieben den wir durch α beziehen wollen; γ sey der kleine Raum welchen er der Schwere wegen in der nemlichen Zeit τ perperticulär auf den Horizont beschreiben würde, und ε der kleine Raum, um den der Widerstand den auf der Tangente durchlaufenen Raum α vermindert, so ist klar, daß sich ε zu γ verhalten wird, wie der Widerstand zur Schweere. Also wird der Körper in der Zeit daß er auf der Tangente den Raum $\alpha - \varepsilon$ dnrchlaufen hätte, um die Größe γ vertical gefallen sind; mithin ist γ der Pfeil des Bogens $\alpha - \varepsilon$. Jetzt, wenn man sich den Körper als von dem nämlichen Punkt ausgehend und den Weg wieder zurückkehrend denkt, um im entgegengesetzten Sinne denselben Bogen der Curve zu beschreiben welchen er durchlaufen hat, so müßte man den Widerstand als negativ ansehen, und daher als eine Kraft welche die Bewegung beschleunigt anstatt sie zu verzögern. Also wird der Körper in der nemlichen kleinen Zeit, den Raum $\alpha + \varepsilon$ auf derselben Tangente in einer entgegengesetzten Richtung beschreiben, und senkrecht in der nemlichen Zeit den Ram γ kraft der Schweere, herabfallen. Mithin ist γ der Pfeil des Bogens $\alpha + \varepsilon$, auf der andern Seite des Punkts, der in redestehende Curve, genommen. Denn da die Pfeile für die unendlich kleinen Bogen sich verhalten wie die Quadrate der Bogen oder der Tangenten, so wird der Pfeil des Bogens $\alpha - \varepsilon$, welcher

cher auf der nemlichen Seite als der Bogen $a + e$ genommen ist,

$$\gamma\left(\frac{a-e}{a+e}\right),$$

seyn; mithin ist die Differenz der Pfeile für die gleichen Bogen $a - e$ auf beyden Seiten des gegebenen Punkts der Curve genommen,

$$\gamma\left[1 - \frac{(a-e)^2}{(a+e)^2}\right] = \frac{4\gamma e}{(a+e)^2}$$

nennen wir nun diese Differenz δ, so hat man

$$\frac{4\gamma e}{(a+e)^2} = \delta \text{ und}$$

$$\frac{e}{\gamma} = \frac{\delta(a+\gamma)^2}{4\gamma^2} = \frac{\delta a}{4\gamma^2},$$

weil die kleine Linie mit einer gleichförmig beschleinigten Geschwindigkeit durchlaufen, unendlich kleiner ist als die in der nemlichen Zeit mit einer gleichförmigen Bewegung durchlaufene Linie a. Dies ist Newtons Raisonement, auf die hellste Art dargestellt; und das Resultat welches wir eben gefunden haben stimmt mit dem des zweiten Zusatzes zu dem angeführten Problem überein, wo man sieht daß die Linien CE und FG dieselben sind welche wir a und γ genannt haben, und daß die Disterung FG — KI das ist was wir δ genannt haben.

Nun setzt Newton voraus, daß, indem er die Abscissen x horizontal und die Ordinaten vertical und von unten nach oben gezogen denkt, für die Abscisse $x + o$ die in einer Reihe ausgedruckte Ordinate

$$y + Qo + Ro^2 - So^3 + \text{u. s. w.}$$

sey, und er bemerkt daß der Theil der Tangente welcher dem Theile o der Axe entspricht

$$o\sqrt{(1 + Q^2)},$$

und der Pfeil, das heißt, der Theil der Coordinate welcher zwiſchen der Curve und der Tangente begriffen iſt,

$$Ro^2 + So^3 + \text{u. ſ. w}$$

ſey. Macht man o negativ, ſo hat man den Pfeil, welcher dem nemlichen Theile der Tangente, auf der andern Seite des Berührungspunkts genommen, entſpricht, und welcher daher

$$Ro^2 - So^3 + \text{u. ſ. w.}$$

iſt; und die Differenz der beiden Pfeile wird

$$2\,So^3 - \text{u. ſ. w.}$$

ſeyn, denn es iſt ſichtbar, daß die Größen

$$o\sqrt{(1+Q^2)},\ Ro^2 + So^3 + \text{u. ſ. w.}$$

und $2\,So^3 - $ u. ſ. w.

denen entſprechen, welche wir α, γ und δ genannt haben; alſo wird die Größe

$$\frac{\alpha\delta}{4\gamma^2}$$

welche das Verhältniß des Widerſtandes zur Schwere ausdrückt, wenn man oben und unten durch o^2, dividirt,

$$\frac{S\sqrt{(1+Q^2)}}{2(R+So)^2} = \frac{S\sqrt{(1+Q^2)}}{2R^2},$$

indem man die unendlich kleine Größe o verſchwinden läßt. Dies iſt auch das durch Newton, im erſten Beiſpiel des nemlichen Problems, gefundene Reſultat.

Nach unſerer Bezeichnung wird y, wenn ſich x in $x+o$ verwandelt

$$y + oy' + \frac{o^2}{2}y'' + \frac{o^3}{2.3}y''' + \text{u. ſ. w.}$$

und

dieſes mit der Reihe des Newton verglichen, giebt

$$Q = y'$$

$$R = -\frac{y''}{2},$$

$$S = -\frac{y'''}{2.3};$$

ſubſtituirt man dieſe Werthe in den vorhergehenden Formeln, ſo wird das Verhältniß des Widerſtandes zur Schwere

$$-\frac{y'''\sqrt{[(1+y'^2)]}}{3y''^2}$$

ſtatt daß wir es oben in no. 201.

$$-\frac{y'''\sqrt{[(1+y'^2)]}}{2y''^2}$$

gefunden haben. Woraus folgt, daß die Auflöſung von Newton fehlerhaft iſt.

Es iſt merkwürdig, daß man, wenn blos y', y'', y''' für $Q - R - S$, ſubſtituirt wird, ein richtiges Reſultat erhält: Dies brachte denen Bernoullis welche zuerſt den Irrthum des Newton entdeckt haben, und allen, welche ſeit der Zeit hierüber geſprochen haben auf die Gedanken, der Irrthum mögte daher kommen, daß Newton die Glieder der Reihe

$$Qo - Ro^2 - So^3 \text{ u. ſ. w.}$$

für die erſten, zweiten und dritten Unterſchiede der Ordinate genommen hätte, da doch dieſe Glieder nur dieſen Unterſchieden durch 1, 2, 6 u. ſ. w. dividirt gleich wären. Aber nach der Analyſis welche wir ſo eben von der Auflöſung des Newton gegeben haben, iſt es leicht zu ſehen, daß ſein Verſehen nicht von der Betrachtung der Unterſchiede herrührt, wovon in ſeiner Auflöſung nicht die Rede iſt, und daß die Subſtitution der Glie-

der Ro^2 und So^3 der in redestehenden Reihe, an die Stelle der Größen

$$\gamma \text{ und } \frac{\delta}{2}$$

in der Formel

$$\frac{a\delta}{4\gamma^2},$$

legitimirt ist: also muß der Irrthum in dieser Formel selbst stecken, welche das Verhältniß des Widerstandes zur Schwere angiebt.

204.

Die Auflösung des Newton kann einfacher und directer auf folgende Art gegeben werden. Wenn man die Geschwindigkeit in irgend einem Punkte der Curve u nennt, so ist u ϑ der Raum den der Körper auf der Tangente in der Zeit ϑ durchlaufen würde, wenn man von der Schwere und dem Widerstande abstrahirt. Wird g die absolute Kraft der Schwere und r die des Widerstandes genennt, so sind

$$\frac{g\vartheta^2}{2} \text{ und } \frac{r\vartheta^2}{2}$$

die in der nemlichen Zeit ϑ vermöge dieser Kräfte durchlaufenen Räume; also wird der Körper in der Richtung der Tangente die Linie

$$u\vartheta - \frac{r\vartheta^2}{2}$$

und in der Richtung der Ordinate y, die Linie

$$\frac{g\vartheta^2}{2}$$

durchlaufen haben, und zwar in einer Richtung die der nach welcher diese Coordinate wächst entgegengesetzt ist.

Es

Es ſey A der Winkel den die Tangente mit der Axe x e macht, ſo wird hieraus nach der Richtung der Axe x e, der Raum

$$\left(u\vartheta - \frac{r\vartheta^2}{2}\right) \text{cof. } A,$$

d nach der Richtung der Axe der y s, der Raum

$$\left(u\vartheta - \frac{r\vartheta^2}{2}\right) \text{Sin. } A. - \frac{g\vartheta^2}{2}$$

Denn, da y eine Funktion von x iſt, ſo wollen wir it Newton annehmen, daß aus

$$x, \; x + o$$

und aus $y, \; y + Qo - Qo^2 - So^3 - \text{u. ſ. w.}$

ürde; man müßte alſo, wenn

$$o = \left(u\vartheta - \frac{r\vartheta^2}{2}\right) \text{cof. } A,$$

macht würde

$$o - Ro^2 - So^3, \text{ u. ſ. w.} = \left(u\vartheta - \frac{r\vartheta^2}{2}\right) \text{Sin. } A. - \frac{g\vartheta^2}{2}$$

ben, was auch der Werth von ϑ ſey, den man als ſehr ein vorausſetzt.

Wir wollen in der zweiten Gleichung den durch die ſte Gleichung gegebenen Werthen o ſubſtituiren, und die lieder in Beziehung auf die Potenzen von ϑ ordnen, ſo at man

$$\vartheta Qu \text{ cof. } A - \left[\frac{Q^{II}}{2} \text{cof. } A + Ru^2 \text{ cof. } A^2\right] \vartheta^2 -$$

$$(Ru\, r \text{ cof. } A^2 + Su^3 \text{ cof. } A^3)\, \vartheta^3 + \text{u. ſ. w.} =$$

$$\vartheta u \text{ ſin. } A - \left[\frac{r \text{ ſin. } A}{2} + \frac{g}{2}\right] \vartheta^2.$$

Vergleicht man Glied vor Glied, ſo hat man

Qu cof.

$$Q u \cos. A = u \sin A,$$
$$Q r \cos. A + 2 R u^2 \cos. A^2 = r \sin A + g$$
$$R u r \cos. A^2 + S u^3 \cos. A^3 = o \text{ u. ſ. w.}$$

Die erſte Gleichung giebt

$$tg. A = Q$$

ſubſtituirt man dieſen Werth in der zweiten, ſo hat man:

$$2 R u^2 \cos. A^2 = g$$

woraus man

$$u^2 = \frac{g}{2 R \cos. A^2} = \frac{g (1 + Q^2)}{2R};$$

zieht; die dritte giebt

$$r = \frac{S u^2 \cos. A}{R},$$

woraus, wenn man für u^2 und für $\cos. A$ ihre Werthe ſubſtituirt,

$$r = \frac{g S \sqrt{(1+Q^2)}}{2R^2},$$

und hieraus

$$\frac{r}{g} = \frac{S \sqrt{(1+Q^2)}}{2R^2}$$

wird, als Verhältniß des Widerſtandes zur Schwere, ſo wie Newton es gefunden hatte. In der That, es iſt leicht zu ſehen daß dieſe Analyſis im Grunde keine andere iſt als die des Newton, befreyt von der Betrachtung der beiden Bewegungen im entgegengeſetzten Sinne und auf die einfachſte Form gebracht; ſie hat überdem den Vorzug daß ſie leicht die Quelle des Fehlers entdecken läßt, und Mittel an die Hand giebt, ihm abzuhelfen.

Denn wenn man den Calcul welche wir eben gegeben haben nur etwas unterſucht, ſo ſieht man gleich daß, weil die Werthe von

$$o \text{ und von } Qo - Ro^2 - So^3 \text{ u. ſ. w.}$$

durch

urch eine nach den Potenzen von θ steigender Reihe aus-
drückt sind, und da diese Reihen nicht über die zweite
otenz von θ steigen, es nicht erlaubt ist, die Näherung
ber diese nemliche Potenz hinaus, in der aus der Elimi-
ung von o entsprungenen Gleichung zu treiben: woraus
an sieht, daß das Glied welches in dieser Gleichung θ^2
nthält, nothwendig unvollständig seyn muß; und weil
es gerade das Glied ist, von welchem das gesuchte Ver-
ältniß von

$$\frac{r}{g}$$

bhängt, so kann man hieraus schließen, daß der gefunde-
e Werth dieses Verhältnisses unrichtig ist.

205.

Um auf diese Art ein genaues Resultat zu erlangen,
müßte man die Glieder in Anschlag bringen, welche
den beiden in redestehenden Reihen, die dritten Poten-
en von θ enthalten: diese Glieder sind nicht wie die ersten
urch die Bedingungen des Problems gegeben; man kann
e aber daraus, nach dem Gesetz von der Ableitung dieser
lieder, herleiten. Denn wenn man die Coordinaten x
nd y als Funktionen von t betrachtet, so werden diese
oordinaten, wenn sich t in $t+\theta$ verwandelt, nach den in
er vorhergehenden Nummer entwickelten mechanischen Be-
achtungen seyn

$$x+\theta u \cos. A - \frac{\theta^2}{2} r \cos. A \text{ und}$$

$$y+\theta u \sin A - \frac{\theta^2}{2}(r \sin A+g);$$

erden diese Reihen mit der algemeinen Form

$$x+\theta x'+\frac{\theta^2}{2} x''+\frac{\theta^3}{2.3} x'''+ \text{u. s. u.}$$

und

und $y + \delta y' + \frac{\delta^2}{2} y'' + \frac{\delta^3}{2.3} y''' +$ u. ſ. w.

verglichen, ſo hat man

$$x' = u \cos. A,$$
$$x'' = -r \cos. A,$$
und $y' = u \sin. A$
$$y'' = -r. \sin A - g$$

woraus man ſogleich zieht

$$x''' = -(r \cos. A)'$$
$$y''' = -(r \sin. A)'$$

indem man durch den, oben an der Parentheſe ſtehen Strich die Erſtefunktion der zwiſchen der Parentheſe haltenen Größe bezeichnet. Mithin werden die in t ſtehenden dritten Glieder

$$-\frac{\delta^3}{2.3} (r \cos. A)' \text{ und}$$
$$-\frac{\delta^3}{2.3} (r \sin. A)'$$

ſeyn. Denn

$$(r \cos. A)' = r' \cos. A - r A' \sin. A, \text{ und}$$
$$(r \sin A)' = r' \sin A + r A' \cos A;$$

Aber die Werthe von x' u. x'' mit einander verglichen, g

$$-r \cos. A = (u \cos. A)' = u' \cos. A - u A' \sin A,$$

eben ſo die Werthe von y' und y'' geben

$$-r \sin A - g = (u \sin A)' =$$
$$u' \sin. A + u A' \cos. A,$$

woraus man, wenn u' eliminirt wird

$$-g \cos A = u A'$$

ſieht; nemlich

$$A' = -\frac{g \cos A}{u},$$

Dieſer Werth von A′ in der oben ſtehenden Formel ſubſtituirt, gibt

$$(r \cos. A)' = r' \cos. A + \frac{g r \sin. A \cos. A}{u},$$

$$(r \sin. A)' = r' \sin A - \frac{g r \cos. A}{u}.$$

Fügt man alſo dieſe neuen Glieder noch zu den Werthen der Größen o und Qo — Ro² — So³ — u. ſ. w. der vorhergehenden Nummer hinzu, ſo hat man

$$o = \vartheta u \cos. A - \frac{\vartheta^2}{2} r \cos. A -$$

$$\frac{\vartheta^3}{2.3}\left(r' \cos A + \frac{g r \sin. A \cos A}{u}\right) \text{ und}$$

$$Qo - Ro^2 - So^3 = \vartheta u \sin. A -$$

$$\frac{\vartheta^2}{2}\left(r' \cos A + g\right) - \frac{\vartheta^3}{2.3}\left(r \sin. A - \frac{g r \cos A^2}{2}\right);$$

Eliminirt man o und treibt die Genauigkeit bis auf ϑ^3 ſo hat man die Gleichung

$$\vartheta Qu \cos. A - \vartheta^2\left(\tfrac{1}{2} Qr \cos. A + Ru^2 \cos. A^2\right) =$$

$$\vartheta^3\left[\frac{Q}{2.3}\left(r' \cos A + \frac{g r \sin. A \cos A}{u}\right) -\right.$$

$$\left. R u r \cos A^2 + Su^3 \cos A^3\right] = \vartheta u \sin A -$$

$$\frac{\vartheta^2}{2} r \sin. A + g) - \frac{\vartheta^3}{2.3}\left(r' \sin. A - \frac{g r \cos A}{u}\right);$$

woraus man durch die Verſetzung der Glieder die Gleichungen

$$Qu \cos. A = u \sin. A$$

$$Qr \cos. A + 2 Ru^2 \cos. A^2 = r \sin. A + g,$$

$$Q\left(r' \cos. A + \frac{g r \sin A \cos A}{u}\right) - 6 Rur \cos A^2 +$$

$$6 S u^3 \cos A^3 = r' \sin A - \frac{gr \cos A^2}{u}.$$

erhält.

Da die beyden erſten die nemlichen als in no. 204 ſind ſo geben ſie ebenfalls

$$\text{tg. } A = Q$$

$$\text{und } u^2 = g \frac{(1+Q^2)}{2R};$$

das dritte aber, wenn man darin

$$Q \cos A$$

an die Stelle von

ſin. A ſubſtituirt, hernach durch $\cos A^2$ dividirt und mit u multiplicirt, wird

$$Q^2 gr = 6 Ru\ r + 6 S u^4 \cos. A = -gr;$$

der vorhergehende Werth von u^2 ſubſtituirt giebt

$$-2gr(1+Q^2) + \frac{6Sg^2(1+Q^2)\ \cos. A}{4R^2} = 0,$$

woraus man wegen

$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{(1+Q^2)}}$$

$$\frac{r}{g} = \frac{3S\sqrt{(1+Q^2)}}{4R^2}$$

zieht, dies iſt der Werth den Newton in der zweyten und dritten Ausgabe der Prinzipien (IIItes Buch IIItes Problem) giebt; und man ſieht daß, wenn man in dieſen Werth die Größen

$$y', -\frac{y''}{2}, -\frac{y'''}{2.3}$$

an die Stelle von Q, R, S (Nr. 203) ſubſtituirt, derſelbe

$$-\frac{y'''\sqrt{(1+y'^2}}{2y''^2}$$

wird, ſo wie er ſeyn muß. (Nr. 201).

Da

Da Newton nur zu diesem Resultat durch einen dem Differenzialcalcul analogischen Gang gelangt ist, so haben wir geglaubt, daß es nicht unnütz wäre zu zeigen, wie die Methode der Reihen dahin führen könnte, und daß man es mir wird zu gleicher Zeit Dank wissen, einen Punkt in der Analysis bey welchen sich die größten Geometer geirrt hatten, aufgeklärt zu haben, welches die Geschichte von dem Ursprung des neuen Calculs interessiren wird.

206.

Wir wollen die allgemeine Formel von Nr. 199. wieder vornehmen, und annehmen, daß die Kraft P gegen einen durch die Coordinaten a, b, c, bestimmten Punct gerichtet sey; so ist, wenn man die geradlinigte Entfernung dieses Punktes von dem den Coordinaten x, y, z entsprechenden Punkt der Curve p nennt,

$$p = \sqrt{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]}$$

und es ist sichtbar, daß

$$\frac{x-a}{p}, \quad \frac{y-b}{p}, \quad \frac{z-c}{p}$$

die Projectionen der Linie p auf den Axen der xe, ys und zs sind; also sind

$$\frac{x-a}{p}, \quad \frac{y-c}{p}, \quad \frac{z-c}{p}$$

die Cosinusse der Winkel, welche die Linie p mit diesen Axen macht, das heißt, der Winkel λ, μ, ν, welchen die Richtung der Kraft P mit dieser nemlichen Axe macht.

Mithin können die Glieder $P\cos.\lambda$, $P\cos.\mu$, $P\cos.\nu$, die von der Kraft P in den Werth Mx'', My'', Mz'' abhängen durch

$$P\frac{x-a}{p},\ P\frac{y-b}{p},\ P\frac{z-c}{p}$$

vorgeſtellt werden.

Wenn man jetzt p einer beſtändigen Größe d gleich ſetzt, ſo hat man die Gleichung von der Oberfläche einer Kugel deren Halbmeſſer d oder p ſind, und deren Mittelpunkt durch die Coordinaten a, b, c beſtimmt wird; die Richtung der Kraft P wird ſenkrecht auf der Oberfläche dieſer Kugel ſeyn, weil ſie verlängert den Mittelpunkt trifft. Wenn daher irgend eine andere durch die Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

vorgeſtellte Oberfläche, die Kugel berührt, wird die Richtung der Kraft P auch noch ſenkrecht auf dieſer Oberfläche ſeyn, und man wird aus Nr. 151, von p an der Stelle von d ſubſtituirt wird,

$$\frac{x-a}{p} = -\frac{z'}{\sqrt{(1+z'^2+z_1^2)}},$$

$$\frac{y-b}{p} = -\frac{z_1}{\sqrt{(1+z'^2+z_1^2)}},$$

$$\frac{z-c}{p} = \frac{1}{\sqrt{(1+z'^2+z_1^2)}}$$

haben, wo z' und z_1 Erſtefunktionen der Größe z ſind, die als eine Funktion von x und y angeſehen iſt und welche durch die Gleichung der Oberfläche gegeben iſt.

Denn nimmt man die beyden Erſtenfunktionen von

$$f(x, y, z) = 0$$

in Abſicht auf x und y, ſo hat man (Nr. 92)

$$f'(x) + z'f'(z) = 0$$

$$\text{und } f'(y) + z_1 f'(z) = 0,$$

wo $f'(x)$, $f'(y)$, $f'(z)$

die Erſtenfunktionen der Funktion

$f(x,$

$$f(x, y. z)$$

Absicht auf x, y, z genommen bezeichnen.

Also $z' = -\frac{f'(x)}{f'(z)}$,

$$z, = -\frac{f'(y)}{f'(z)};$$

ithin hat man

$$\frac{x - a}{p} = \frac{f'(x)}{\sqrt{[f'(x)^2 + f'(y,^2 + f'(z)^2]}}$$

$$\frac{y - b}{p} = \frac{f'(y)}{\sqrt{[f'(x)^2 + f'(y)^2 + f(z,|^2]}}$$

$$\frac{z - c}{p} = \frac{f'(z)}{\sqrt{[f'(x)^2 + f'(y)^2 + f'(z)^2]}}$$

enn also die Kraft P nach einer senkrechten Richtung f der durch die Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

rgestellten Oberfläche wirkt, so werden hieraus in den erthen der Größen

$$Mx'', My'', Mz''$$

: respectiven Glieder

$$\frac{Pf'(x)}{\sqrt{[f'(x)^2 + f'(y)^2 + f'(z)^2]}}$$

$$\frac{Pf'(y)}{\sqrt{[f'(x)^2 + f'(y)^2 + f'(z)^2]}}$$

$$\frac{Pf'(z)}{\sqrt{[f'(x)^2 + f'(y)^2 + f'(z)^2}}$$

tstehen.

207.

Wenn man annimt, daß der Körper gezwungen , sich auf einer durch die Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

rgestellten Oberfläche zu bewegen, so ist klar, daß die irkung der Oberfläche auf den Körper nicht anders als

recht auf der Oberfläche seyn kann. Nennt man also die Kraft, welche aus dieser Wirkung entsteht P, und macht man

$$\Pi = \frac{P}{\sqrt{[f'(x)^2 + f'(y)^2 + f'(z)^2}}$$

so hat man

$$\Pi f'(x),\ \Pi f'(y),\ \Pi f'(z)$$

für die von dieser Kraft in den Gleichungen von Nr. 199 abhängender Glieder. Denn, da die Kraft P nur der Richtung nach gegeben ist, so bleibt uns ihr Werth unbekannt: mithin wird die Größe Π in dieser Gleichung als eine unbekannte Größe hineingehen; da man aber die Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

hat, welcher die Werthe von x, y, z genüge leisten müssen, was auch immer die Zeit t sey, so wird man, wenn das unbekannte Π eliminirt wird, noch so viel Gleichungen haben, als zur Auflösung des Problems nöthig sind.

Jetzt ist es leicht zu begreifen, daß das nemliche Resultat statt haben wird, wenn man, nachdem von der Oberfläche abstrahirt wird, nur die Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

als eine Bedingungsgleichung ansieht, welche durch die Natur der vorgegebenen mechanischen Frage gegeben ist, woraus man schließen kann, daß jede Bedingung des durch die Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

ausgedrückten Problems in den Werthen von

$$Mx'',\ My'',\ Mz''$$

Glieder von der Form

$$\Pi f'(x),\ \Pi f'(y),\ \Pi f'(z)$$

geben wird.

Wenn

Wenn alſo auch in einem Probleme zwey durch die
Gleichungen

$$f(x, y, z) = 0$$
$$\varphi(x, y, z) = 0$$

ausgedrückte Bedingungen wären, welches der Fall bey
Körpern iſt die ſich nach Linien von gegebenen Figuren
bewegen, ſo wird jede dieſer Gleichungen ähnliche Glieder
haben. Alſo müßte man, vermöge dieſer Gleichungen die
Glieder

$$\Pi f'(x) + \Psi \varphi'(x),$$
$$\Pi f'(y) + \Psi \varphi'(y),$$
$$\Pi f'(z) + \Psi \varphi'(z)$$

den Werthen von

$$Mx'', My'', Mz''$$

hinzufügen.
Die Größen Π und Ψ bleiben unbeſtimmt, und müſſen eli-
minirt werden; aber die Gleichungen welche man wenig-
ſtens durch dieſe Eliminirung hat, würden durch die ge-
gebenen Gleichungen

$$f(x, y, z) = 0 \text{ und}$$
$$\varphi(x, y, z) = 0$$

erfetzt ſeyn; und ſo weiter.

208.

Bisher haben wir nur bloß die Bewegung eines iſo-
lirten Körpers betrachtet; man kann aber die eben gefun-
denen Formeln gleichfalls auf Bewegungen ſolcher Körper
anwenden, welche auf irgend eine Art auf einander wir-
ken, es ſey nun indem ſie ſich durch Faden oder durch Ge-
wölbe ziehen, oder indem ſie ſich unmittelbar oder durch An-
bringung der Ruthen und Federn u. ſ. w. ſtoßen.

Wenn mehrere Körper miteinander verbunden ſind

und von einander abhängen, dergestalt, daß der eine nicht bewegt werden kann, ohne den andern mehr oder weniger von seiner Bewegung mitzutheilen, so kann man immer die Bedingungen dieses Systems durch Gleichungen zwischen den Coordinaten der verschiedenen dieses System ausmachenden Körper ausdrücken; denn es ist sichtbar, daß diese Bedingungen nur allein in den gegebenen Beziehungen zwischen den Oertern der Körper im Raume bestehen können. Man hat also in diesem Fall verschiedene Gleichungen von der Form

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \text{u. s. w.}) = 0$$

wenn man die Coordinaten des einen Körpers im System dessen Masse M ist x, y, z, die Coordinaten eines andern von diesen Körpern der die Masse N hat, ξ, η, ζ nennt u. s. w.; und jede der Funktionen

$$f(x, y \ldots\ldots)$$

wird in Absicht auf den Körper M, in den Werthen von

$$M x'', M y'', M z''$$

die nemlichen Glieder

$$\Pi f'(x), \Pi f'(y), \Pi f'(z)$$

geben, als wenn die Größen ξ, η, ζ, u. s. w. beständige Größen wären: denn es ist leicht zu begreifen, daß die Richtung der Kraft P, Q u. s. w. in irgend einen Augenblick die nemliche seyn muß, der Körper mag sich bewegen oder nicht, weil sie einzig von der wechselseitigen Anordnung der Körper gegen einander in diesen Augenblick, abhängt.

Aus demselben Grunde wird die Funktion in Absicht auf den Körper N in den Werthen von

$$N \xi'', N \eta'', N \zeta'',$$

Die Glieder

$$\Pi f'(\xi), \Pi f'(\eta), \Pi f'(\zeta)$$

geben

geben, wenn man durch

$$f'(\xi), f'(\eta), f'(\zeta)$$

die Erſtenfunktionen von

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$$

in Abſicht auf ξ, η, ζ genommen bezeichnet; und ſo weiter für jeden Körper im Syſteme, und für jede Funktion die aus verſchiedene durch die Bedingungen des Syſtems gegebene Gleichungen entſtehet.

209.

Wenn ſich Körper durch innere Kräfte oder durch die Wirkung der Federn an welchen ſie befeſtigt ſind, anziehen oder zurückſtoßen, ſo wird, weil ſich die Kraft in der Richtung der Linie äußert, welche die beiden auf einander wirkenden Körper verbindet, ihre Richtung für jeden dieſer wirkenden Körper ſenkrecht auf derjenigen ſphäriſchen Oberfläche ſeyn, welche durch dieſen Körper geht und deren Mittelpunkt in den andern Körper liegt. Nenn man alſo d die Entfernung der beiden Körper M und N nennt, ſo hat man für die beyden Oberflächen die Gleichung

$$\sqrt{[(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z+\zeta)^2]} = d$$

wenn man x, y, z für die Coordinaten der durch M gehenden Oberfläche, und ξ, η, ζ für die Coordinaten der durch N gehenden Oberfläche nimmt. Alſo ſetzt man nach der Theorie von no. 207.

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) =$$
$$\sqrt{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]} - d;$$

und da dieſer Werth

$$f(x)^2 + f'(y)^2 + f'(z)^2 = 1$$

giebt, ſo hat man

$$P = \Pi.$$

Also, weil die Größe d als beständig angesehen werden muß, wenn man davon die Erstefunktionen nimmt, so macht man blos

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) =$$
$$\sqrt{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]};$$

und nimmt man Π für die absolute auf beyden Körpern wirkende Kraft, so hat man die nemlichen Formeln wie oben, für den Effect dieser Kraft bey der Bewegung der Körper M und N, wo man bemerken muß, daß die Kraft Π positiv, wenn sie strebt die Entfernung der Körper zu vergrößern, und negativ wenn sie sich bemüht sie zu verkleinern, angenommen werden muß.

Hier ist es evident, daß die Größen Π für die Glieder, welche aus der Funktion

$$f(x, y \ldots .)$$

in den sich auf den Körpern M und N beziehende Gleichungen entstehen, die nemliche seyn muß. Man könnte zweifeln ob dies auch im allgemeinen statt habe, da wir vorausgesetzt haben, auf welche Art die Körper unter sich wirken sollen: man kann es aber vermittelst der bekannten Principien von den virtuellen Geschwindigkeiten prüfen.

210.

In der That, aus dem was weiter oben (no. 207.) bewiesen ist, geht bloß hervor, daß die von der Bedingungsgleichung

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta \ldots) = 0$$

abhängenden Kräfte durch

$$\Pi f'(x), \Pi f'(y), \Pi f'[z)$$

für den Körper M und durch

$$\Phi f'(\xi), \Phi f'(\eta), \Phi f'(\zeta)$$

für

für den Körper N vorgestellt sind, u. s. w., die Größen Π, Ψ, u. s. w. müssen nothwendig die nemlichen für denselben Körper seyn. Diese Kräfte sind, so zu sagen, nichts anders als Widerstands Kräfte, welche von der wechselseitigen Würkung der Körper entstehen, oder welche von den Hinderniſſen herkommen, die wegen der Natur des Systems die Bewegung der Körper erregen und ändern. Wenn man also jeden Körper gleiche und jenen gerade entgegengesetzte Kräfte mittheilte, so würde der Effect dieser Kräfte durch Widerstände, von welchen wir eben gesprochen haben zerstört werden; mithin muß das System im Gleichgewicht bleiben. Also, die nach den Richtungen ihrer Coordinaten durch die Kräfte

$$-\Pi f'(x),\ -\Pi f'(y).\ -\Pi f'(z)$$

für den Körper M, und durch die Kräfte

$$-\Psi f'(\xi),\ -\Psi f'(\eta),\ -\Psi f'(\zeta)$$

für den Körper, u. s. w. gereitzten Körper M, N, müssen sich das Gleichgewicht halten. Denn wenn man dem System irgend eine Bewegung gäbe, so muß nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, die Summe der Kräfte, jede in die Geschwindigkeit nach der Richtung der Kraft desjenigen Punkts wo sie angebracht ist, multiplicirt, im Fall des Gleichgewichts Null seyn.

Nimmt man also in unserem Falle die reellen Geschwindigkeiten x', y', z', ξ', η', ζ' u. s. w. der Körper M, N, u. s. w. nach den Richtungen ihrer Coordinaten, an, für ihre virtuellen Geschwindigkeiten nach diesen Richtungen, so wird man für das Gleichgewicht der in ruhe bestehenden Kräfte die Gleichungen

$$-\Pi f'(x)\,x' - \Pi f'(y)\,y' - \Pi f'(z)\,z' -$$
$$\Psi f'(\xi)\,\xi' - \Psi f'(\eta)\,\eta' - \Psi f'(\zeta)\,\zeta' - \text{u. s. w.} = 0$$

haben, und diese Gleichung wird vermöge der Bedin-

gungsgleichung

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta \ldots\ldots) = 0$$

ganz allgemein ſtatt haben, wovon die Kräfte

$$\Pi f'(x), \Pi f'(y), \text{ u. ſ. w.}$$

abhängen. Denn wenn man die Erſtegleichung dieſer Gleichung in Abſicht auf der Zeit t nimmt, wo man ſich die veränderlichen Größen x, y, z, ξ, η, ζ u. ſ. w. als Funktionen denkt, ſo hat man (no. 31.)

$$x' f'(x) + y' f'(y) + z' f'(z) +$$
$$\xi' f'(\xi) + \eta' f'(\eta) + \zeta' f'(\zeta) + \text{u. ſ. w.} = 0;$$

und es iſt ſichtbar, daß dieſe Gleichung abhängig von den Werthen der Geſchwindigkeiten x', y', u. ſ. w. mit der vorhergehenden nicht beſtehen kann, wenigſtens daß man nicht

$$\Pi = \Psi = \text{u. ſ. w. hat.}$$

Man kann hieraus ganz allgemein ſchließen, daß die Kräfte welche aus der gegenſeitigen Würkung der Körper eines gegebenen Syſtems, entſtehen können, ſich direct aus den Bedingungsgleichungen, welche zwiſchen den Coordinaten der verſchiedenen Körper des Syſtems ſtatt haben müſſen, herleiten laſſen, indem man die Erſtefunktionen von den Funktionen nimmt welche vermöge dieſer Gleichungen Null ſind. Die Erſtefunktionen der nemlichen Funktion in Beziehung der verſchiedenen Coordinaten genommen, ſind immer den Kräften proportional welche nach den Richtungen dieſer Coordinaten würken und die von der Bedingung in Beziehung auf dieſe Funktion abhängen. Ich war ſchon zu einem ähnlichen Reſultat in der analytiſchen Mechanik gekommen; der vorhergehende Beweis iſt mehr direct, und giebt ſo zu ſagen die Metaphyſik der Sache.

211.

Wir wollen annehmen daß die Bedingungen des Syſtem unabhängig von dem Urſprung der Abſciſſen wäre, das heißt, von der Lage der Ebene der ys und zs, und daß folglich die durch die Buchſtaben f, φ, u. ſ. w. bezeichneten Funktionen, ſo beſchaffen ſind, daß, wenn man zugleich die Abſciſſen x, ξ, u. ſ. w der verſchiedenen Körper um einerley beliebige Größe i vermehrt, dieſe Größe von ſelbſt aus den Funktion verſchwindet; welches ſtatt haben wird, wenn dieſe Funktionen nicht die Größe x, ξ u. ſ. w. iſoliert ſondern nur ihre Unterſchiede $x-\xi$, u. ſ. w. enthalten.

Subſtituirt man $x+i$, $\xi+i$, u. ſ. w. in die Stelle von x, und ξ, u. ſ. w, in der Funktion $f(x, y, z, \xi \ldots)$ ſo wird ſie durch die Entwicklung nach den Potenzen von i,

$$f(x,y,z,\xi\ldots) + i[f'(x) + i(f'(\xi) + \text{u. ſ. w.}] + \frac{i^2}{2}[f''(x) + \text{u. ſ. w.}]$$

Alſo hat man nothwendig die Gleichung von der erſten Ordnung

$$f'(x) + f'(\xi) + \text{u. ſ. w.} = 0.$$

Man findet auf dieſelbe Art

$$\varphi'(x) + \varphi'(\xi) + \text{u. ſ. w.} = 0;$$

und ſo weiter.

Denn wenn das Syſtem keinen anderen Kräften unterworfen iſt als denen welche aus der gegenſeitigen Würkung der Körper entſtehen können, ſo werden die Gleichungen von der Bewegung in Beziehung auf die Cordinaten x, ξ, u. ſ. w. von der Form (no. 297)

$$Mx'' = \Pi f'(x) + \Psi\varphi'(x) + \text{u. ſ. w.}$$
$$N\xi'' = \Pi f'(\xi) + \Psi\varphi'(\xi) + \text{u. ſ. w.}$$

u. ſ. w. ſeyn.

Alſo

Alſo addirt man dieſe Gleichungen zuſammen, ſo hat man bloß

$$M x'' + N \xi'' + \text{u. ſ. w.} = \sigma$$

eine von den Bedingungen des Syſtems unabhängige Gleichung.

Dieſe Gleichung hat die urſprüngliche Gleichung

$$M x' + N \xi' + \text{u. ſ. w.} = a;$$

und dieſe hat noch die urſprüngliche Gleichung

$$M x + N' \xi + \text{u. ſ. w.} = at + b,$$

wo a und b willkührliche beſtändige Größe ſind.

Man hat alſo ſogleich in dieſem Falle eine Beziehung zwiſchen den verſchiedenen Abſciſſen x, ξ, u. ſ. w.

Es iſt leicht einzuſehen daß der in redeſtehender Fall bey jedem System ſtatt haben muß, welches ganz frey iſt ſich in der Richtung der Axe des Abſciſſen zu bewegen, was auch immer die Wirkung ſey welche die Körper auf einander ausüben können. Denn alsdenn, können die Bedingungen des Syſtems in Beziehung auf die Axe nur von den reſpectiven Lage der Körper abhängen und keinesweges von ihrer Lage in Beziehung auf den Urſprung der Abſciſſen; folglich können die Gleichungen welche dieſe Bedingungen ausdrücken nur die Unterſchiede $x - \xi$ u. ſ. w. der Abſciſſen enthalten. Und wenn die Körper auf einander gegenſeitige Attractionen oder Repulſionen ausüben, ſo werden, da die Funcktionen

$$f(x, y, z, \xi \ldots)$$

welche von dieſen Kräften abhängen bloß durch die Entfernungen

$$\sqrt{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]} \text{ u, ſ. w.}$$

(no. 209) vorgeſtellt ſind, dieſe Funktionen auch dieſelbe Eigenſchaften haben.

Alſo, wenn die Bewegung des Syſtems ganz frey ach der Richtung der Axt der xe wäre, ſo wird, af elche Art die Körper auf einander würken mögen, es y durch die gegenſeitige Kraft des Widerſtands oder urch die Kräfte der Attraction oder der Repulſion, die orhergehende Gleichung zwiſchen den Abſciſſen x, ξ u. ſ. . der verſchiedenen Körper immer ſtatt haben.

Wenn man in dem Syſtem einen der Abſciſſe X ent- rechenden Punkt annimt, dergeſtallt daß man hätte

$$X = \frac{Mx + N\xi + \text{u. ſ. w.}}{M + N + \text{u. ſ. w.}},$$

) wird man

$$X'' = 0$$

nd hieraus

$$X' = a,\ X = at,$$

aben, wenn man annimt daß der Raum X im Anfan- e der Zeit t Null iſt. Alſo wird die Bewegung dieſes unkts nach der Richtung der Axe der xe gleichförmig ait der beſtändigen Geſchwindigkeit a ſeyn.

212.

Wenn man annimt daß die Körper M, N u. ſ. w. n demſelben Syſtem ferner durch beliebige Kräfte P, Q . ſ. w. gereitzt würden, die nach der Axe der xe ge- ichtet ſind, und dahin ſtreben die xe u. ξs u. ſ. w. zu ver- nehren, ſo müßte mann in dieſem Falle reſpective die ie Größen P, Q u. ſ. w. zu den Werthen von $Mx' N$;'' u. ſ. w. hinzufügen, welches die Gleichungen

$$Mx'' = P + \Pi f'(x) + \Psi \varphi'(x) + \text{u. ſ. w.}$$
$$M\xi'' = Q + \Pi f'(\xi) + \Psi \varphi'(\xi) + \text{u. ſ. w.}$$

iebt, deren Summe

$Mx'' +$

$$Mx'' + N\xi'' + u.\,s.\,w. = P + Q + u.\,s.\,w.$$

ist, und wenn man für $Mx + N\xi + u.\,s.\,w.$ die Größe

$$(M + N + u.\,s\,w)\,X,$$

setzt, so hat man $(M + N + u.\,s.\,w.)X'' = P + Q + u.\,s.\,w.$ eine Gleichung, welche die geradlinigte Bewegung eines Körpers von der Masse $M + N + u.\,s.\,w.$ nach der Axe xe vorstellt, und der durch eine Kraft gleich $P + Q + u.\,s.\,w.$ gereizt ist.

Woraus man schließen kann, daß derjenige Punkt des Systems welcher der Abscisse X entspricht, in der Richtung der Axe der xe die nemliche Bewegung haben wird, welche er haben würde wenn alle Körper des Systems in diesem Punkt concentrirt wären, und daß alle Kräfte welche auf die Körper in der Richtung der nemlichen Axe wirken, bey ihm angebracht würden.

213.

Wenn das System mit einmal in Absicht auf die Axe der xe und die ys frey ist, so ist es sichtbar daß die nemliche Resultate für die Bewegung nach diesen beyden Axen statt haben werden, und wenn das System in ganzen Sinn gänzlich frey ist, so werden die nemlichen Resultate in Beziehung auf drey Axen statt haben; und man kann hieraus schlißen; wenn man in dem System einen der Coordinaten X, Y, Z entsprechenden Punkt nimmt, so daß man hat

$$X = \frac{Mx + N\xi + u.\,s.\,w.}{M + N + u.\,s.\,w.}$$

$$Y = \frac{My + N\eta + u.\,s.\,w.}{M + N + u.\,s.\,w.};$$

$$Z = \frac{Mz + N\zeta + u\,s.\,w.}{M + N + u.\,s.\,w.}$$

so

so wird dieser Punkt, wenn das System durch keine äußere Kraft gereizt wird, sich gleichförmig in einer geraden Linie bewegen; ferner kann man schließen, daß, wenn die verschiedenen Körper des Systems durch beliebige Kräfte gereizt sind, dieser nemliche Punkt sich bewegen würde, als wenn alle Körper darinn concentrirt wären, und wenn alle Kräfte darin jede nach ihrer eignen Richtung angebracht wären

Der in redestehende Punkt ist in der Mechanik unter den Nahmen Mittelpunkt des Schweere bekannt, und der eben bewiesene Satz heißt gewöhnlich wie folgt: Der Zustand der Bewegung oder der Ruhe des Mittelpunkts der Schweere von mehrerern Körpern, ändert nicht die wechselseitige Würkung der Körper unter sich, wenn nur das System ganz frey ist, welches das Princip oder das Gesetz an der Erhaltung der Bewegung des Mittelpunkts der Schwere ausmacht.

Es ist nützlich, zu bemerken daß das Princip auch statt haben wird, wenn durch die wechselseitige Begegnung und Wirkung der Körper plötzliche Veränderungen in ihren Bewegungen entstehen; denn man kann diese Veränderungen als durch die Wirkungen der zwischen den sich stoßenden Körpern liegenden Federn hervorgebracht ansehen. Aus diesem Gesichtspunkte kann man die Veränderungen welche in den Stoß der harten Körper geschehen, betrachten, und es ist aus diesen Grund, daß die Bewegung des Mittelpunkts der Schwere nicht in diesen Veränderungen alterirt wird.

214.

Man bezieht gemeiniglich den Mittelpunkt der Schwere von mehreren Körpern, auf drey feste Axen, vermittelst

mittelst der oben gegebenen Coordinaten X, Y, Z; wenn man sie auf bestimmte Punkte beziehen wollte, so wird, wenn man die drey Coordinaten von einem dieser Punkte a, b, c und die Entfernung des Mittelpunkts der Schwere von diesen Punkte d nennt

$$d^2=(X-a)^2+(Y-b)^2=X^2+Y^2+Z^2-$$
$$-2aX-2bY-2cZ+a^2+b^2+c^2.$$

Denn wenn man das Quadrat von der Größe $Mx+N\xi+$ u. s. w. macht, so ist es leicht zu sehen, daß man es unter der Form

$(M+N+$ u. s. w.$)Mx^2+N\xi^2+$ u. s. w.$)-MN(x-\xi)^2-$ u. s. w.

bringen kann; mithin hat man (vorhergehende Nummer)

$$x^2=\frac{Mx^2+N\xi^2+\text{n. s. w.}}{M+N+\text{u. s. w.}}-\frac{MN(x-\xi)^2+\text{u s.w.}}{(M+N+\text{u. s. w.})}$$

und hieraus $X^2-2aX+a^2=$

$$\frac{M(x-a)^2+N(\xi-a)^2+\text{n. s. w.}}{M+N+\text{u. s. w.}}-\frac{MN(x-\xi)^2+\text{u s.w.}}{(M+N+\text{u. s. w.})^2}$$

Man wird auch eben so

$$Y^2-2bY+b^2=$$
$$\frac{M(z-b)^2+N(\eta-b)^2+\text{u. s. w.}}{M+N+\text{u. s. w.}}-\frac{MN(y-\eta)^2+\text{u. s. w.}}{M+N+\text{u. s. w.})^2}$$

finden, und gleichfalls

$$Z^2-2cZ+c^2=$$
$$\frac{M(z-c)^2+N(\zeta-c)^2+\text{u. s. w.}}{M+N+\text{u. s. w.}}-\frac{MN(z-\zeta)^2+\text{u. s. w.}}{M+N+\text{u. s. w.})^2}$$

Wenn

Wenn man diese Substitutionen in dem vorhergehenden Ausdruck von d^2 macht, und der Kürze wegen durch A die Summe der Massen N, N, u. s. w. bezeichnet, jede durch das Quadrat ihrer Entfernung vom gegebenen Punkt multiplicirt, diese Summe ferner durch die Summe der Massen dividirt; und wenn man auch durch B die Summe von den Produkten der Massen bezeichnet, je zwey und zwey genommen, und durch das Quadrat ihrer respectiven Entfernungen multiplicirt, diese Summe durch das Quadrat von der Summe der Massen dividirt, so hat man

$$d^2 = A - B,$$

mithin

$$d = \sqrt{(A - B)},$$

Da also die Größe B nur von der respectiven Lage der Körper abhängt, so hat man, wenn man die Werthe von A in Beziehung auf drey verschiedene Punkte die nach Belieben, im System oder außer ihm genommen sind, bestimmt, die Entfernungen des Mittelpunkts der Schwere von diesen Punkten, und folglich seine absolute Lage. Wenn die Körper alle in der nemlichen Ebene wären, so brauchte man nur zwey Punkte zu betrachten, und man würde nur einen einzigen brauchen, wenn alle Körper in einer geraden Linie wären. Wenn man die drey gegebenen Punkte selbst in den Körpern des Systems annimmt, so wird die Lage des Mittelpunkts der Schwere bloß durch die Massen und ihre respective Entfernungen gegeben seyn. Da diese Art, den Mittelpunkt der Schwere zu finden, wenig bekannt ist, so habe ich geglaubt, sie hier des Nutzens wegen den sie bey verschiedenen Gelegenheiten verschaffen kann, geben zu müssen.

215.

Wir wollen jetzt annehmen, daß die Bedingungen des Systems unabhängig von der Richtung der Axe der xe und ys auf der Ebene dieser Coordinaten seyn, so daß, wenn man diese Axen sich um die Axe der zs unter einem beliebigen Winkel i drehen läßt, welches die Abscissen x, ξ u. s. w. in x cos. i − y sin. i, ξ cos. i − n sin. i u. s. w. und die Ordinaten y, n. s. w. in y cos. i + x sin. i, cos. i + ξ sin. i u. s. w. verwandelt, die durch die Buchstaben f, φ vorgestellten Funktionen nicht wegen dieser Veränderung variiren, wie groß auch der Winkel i sey. Es ist leicht zu sehen, daß diese Eigenschaften im allgemeinen in jeder Funktion der Größen

$$x^2 + y^2,\ \xi^2 + \eta^2,\ x\xi + y\eta,\ x\eta - \eta\xi \text{ u. s. w.}$$

statt haben wird.

Wenn man

$$\begin{aligned} a &= x(\cos. i - 1) - y \sin. i, \\ b &= y(\cos. i - 1) + x \sin. i, \\ \alpha &= \xi(\cos. i - 1) - \eta \sin. i, \\ \beta &= \eta(\cos. i - 1) + \xi \sin. i, \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

macht; so muß, indem zugleich in diesen Funktionen $x+a$, $y+b$, $\xi+\alpha$, $\eta+\beta$ u. s. w. an der Stelle von x, y, ξ, η, u. s. w. gesetzt und nach den Potenzen von i entwickelt wird, die Summe der Glieder Null seyn, welche mit einerley Potenz behaftet sind. Denn die Funktion $f(x, y, z, \xi \ldots)$ wird durch die Substitution und durch die Entwickelung nach den Potenzen von a, b, α, β u. s. w.

$$f(x,y,z,\xi\ldots.) + af(x) + bf'(y) + \alpha f'(\xi) + \beta f'(\eta) + \text{u. s. w.} + \frac{a^2}{2} f''(x) + \text{u. s. w.}$$

Man hat aber

$$\sin i = i - \frac{i^3}{2 \cdot 3} + \text{u. s. w.},$$

$$\cos i =$$

$$\cos i = 1 - \frac{i^2}{2} + \text{u. ſ. w.}$$

mithin ſind die in der hervorgehenden Formel mit i behafteten Glieder

$$i[-yf'(x) + xf'(y) - \eta f'(\xi) + \xi f'(\eta) - \text{u. ſ. w.}]$$

folglich hat man für die Funktion $f(x, y \ldots.)$ die Bedingungsgleichung

$$xf'y - yf'(x) + \xi f'(\eta) - \eta f'(\xi) \text{ u. ſ. w} = 0$$

Man findet auf die nemliche Art für die Funktion $\varphi(x, y \ldots.)$ die Gleichung

$$x\varphi'y) - y\varphi'(x) + \xi\varphi'(\eta) - \eta\varphi'(\xi) + \text{u. ſ. w.} = 0$$

und ſo auch mit den andern.

216.

Ferner, wenn die Körper des Syſtems keine andere Wirkungen auszuſtehen haben als diejenigen welche durch ihre gegenſeitige Verbindung entſtehen, ſo werden die Gleichungen der Bewegung in Beziehung auf die Coordinaten x, y, ξ, η u. ſ. w. dieſe Form haben (no. 207)

$$Mx'' = \Pi f'(x) + \Phi\varphi'(x) + \text{u. ſ. w.}$$
$$My'' = \Pi f'(y) + \Phi\varphi'(y) + \text{u. ſ. w.}$$
$$N\xi'' = \Pi f'(\xi) + \Phi\varphi'(\xi) + \text{u. ſ. w.}$$
$$N\eta'' = \Pi f'(\eta) + \Phi\varphi'(\eta) + \text{u. ſ. w.}$$

Wenn man alſo die zweite von dieſen durch x, multiplicirten Gleichungen, die vierte durch ξ multiplicirte und ſo fort, zuſammenaddirt und hiervon die erſte durch y multiplicirte, die dritte durch η multiplicirte u. ſ. w. abzieht, ſo hat man vermöge der eben gefundenen Bedingungsgleichungen, die Gleichung:

$$M(xy'' - yx'') + N(\xi\eta'' - \eta\xi'') + \text{u. ſ. w.} = 0$$

welche auch wie man ſieht unabhängig von den Bedingungen des Syſtems iſt.

Nimt man hiervon ihre urſprüngliche Gleichung, ſo iſt

$$M(xy' - yx') + N(\xi\eta' - \eta\xi') + \text{u. ſ. w.} = C$$

wo C eine willkührliche beſtändige Größe iſt. Alſo hat man auf der Stelle eine Gleichung von der erſten Ordnung zwiſchen den Coordinaten x, y, ξ, η u. ſ. w. der verſchiedenen Körper.

Denn $xy' - yx' = xy' + yx' - 2yx'$;

aber $xy' + yx'$ iſt die Erſtefunktion von xy, daß heißt, von dem doppelten Inhalt des rechtwinkeligen Dreyecks deſſen Grundlinie x und Höhe y iſt, und yx' iſt die Erſtefunktion von der zwiſchen der Abſciſſe x und Ordinate y begriffenen Curve; mithin wird

$$\frac{xy' - yx'}{2}$$

die Erſtefunktionen von dem Unterſchiede des Dreyecks und des Flächen-Inhalts von den wir ſprechen ſeyn; und es iſt leicht zu ſehen, daß dieſer Unterſchied ganz allgemein, dem zwiſchen der Curve, deren Coordinaten x und y ſind, begriffenem Raume, und zwiſchen der vom Urſprung dieſer Coordinaten bis zur Curve gezogenen gerade Linie, das heißt, dem Flächeninhalt des durch dieſe nemliche gerade Linie beſchriebenen Sectors welchen man den Radius vector nennt, gleich iſt.

Nennt man dieſen Flächeninhalt A ſo iſt

$$xy' - yx' = 2A';$$

und nennt man eben ſo α den Flächeninhalt, der durch den Radius vector beſchrieben wird, welcher an die Curve wovon ξ und η die Coordinaten ſind gezogen iſt ſo hat man gleichfalls

$$\xi\eta' - \eta\xi' = 2\alpha'; \text{ u. ſ. w.}$$

Auf dieſe Art wird die vorhergehende Gleichung

$2MA' +$

$$2MA' + 2N\alpha' + \text{u. f. w} = C;$$

und da die Erstefunktionen, sich hier auf die Zeit beziehen, so hat man diese ursprüngliche Gleichung

$$MA + N\alpha + \text{u. f. w.} = \tfrac{1}{2}Ct + D,$$

wo D eine willkührliche beständige Größe ist, welche Null seyn wird, wenn man die Flächeninhalte A, α u. f. w. vom Anfang der Zeit t anfangen läßt. Alsdenn wird die Summe der Flächeninhalte jeder durch die correspondirende Masse multiplicirt, der Zeit proportional seyn.

Es kann zufolge der Gestalt der Curve, deren Coordinaten x und y sind, geschehen, daß der durch den Radius vector beschriebene Flächeninhalt im Gegentheil der Unterschied zwischen dem Inhalt der Curve nnd dem des Dreyecks ist, in welchem Fall man hat $xy' - yx' = -2A'$; man kann sich aber leicht überzeugen, daß in diesem Fall der Inhalt in einem entgegengesetzten Sinne beschrieben wird. Ganz allgemein also, die Summe von den Produkten der Massen in den Flächeninhalten wird der Zeit proportional seyn, wenn man die in dem nemlichen Sinne beschriebenen Inhalte positiv, und die welche in einem entgegengesetzten Sinne beschrieben sind negativ nimmt. Dies ist eine wesentliche Bemerkung, ohne welcher das in redestehende Theorem nicht ganz allgemein wahr seyn würde.

Dieses Gesetz der Inhalte findet also bey der Bewegung aller Systeme von Körpeen statt, die auf irgend eine Art auf einander wirken, wenn nur das System ganz frey sich um die Axe der zs senkrecht auf der Ebene der xe und ys drehen kann; denn es ist sichtbar daß die von der gegenseitigen Verbindung der Körper herkommenden Bedingungen, bey ieder Richtung welche

man den Axen der x e und y s giebt, die nemlichen seyn werden.

Und wenn die Körper auf einander durch Attractions oder Repulsions-Kräfte würken, und die von diesen Kräften abhängenden Funktionen die, bloß durch die Entfernungen

$$\sqrt{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$ u. s. w.

(no. 209) vorgestellt sind, so werden diese Funktionen auch die Eigenschaft haben, welche wir vorausgesetzt haben und es wird folglich das nemliche Gesetz der Inhalte noch statt haben.

Endlich wenn die Körper M, N u. s. w. ferner durch beliebige Kräfte P, Q u. s. w. gereizt werden, die gegen gegebene Punkte der Axe der z s, welche von der Eben der x e und y s um die Größen m, n u. s. w. entfernt sind, so ist es leicht aus den Formeln in no. 206 zu schließen daß man zu den Werthen von Mx'' und Ny'' die respektiven Glieder

$$\frac{Px}{\sqrt{[x^2+y^2+(z-m)^2]}}$$

und $$\frac{Py}{\sqrt{[x^2+y^2(z-m)^2]}}$$

hinzufügen muß; und eben so zu den Werthen von $M\xi''$ und $N\eta''$ die Glieder

$$\frac{Q\xi}{\sqrt{[\xi^2+\eta^2(\zeta-n)^2]}}$$

und $$\frac{Q\eta}{\sqrt{[\xi^2+\eta^2+(\zeta-m)^2}}$$

und so weiter. Folglich sind die Werthe der Größen

$$M(xy''-yx''),\quad M(\xi\eta''-\eta\xi'')$$ u. s. w.

unabhängig von diesen Kräften, und das Gesetz der Inhalte wird auch in diesem Fall bestehen: es wird also auch noch gelten wenn die Körper nur noch durch Kräfte

die

die parallel mit der nemlichen Axe laufen gereitzt werden, und mithin senkrecht auf der Ebene der x e und y ε sind.

217.

Also wenn ganz allgemein daß System sich frey um eine feste Axe drehen kann, so ist, bey jeder Wirkung welche die Körper auf einander ausüben können, und von welchen Kräften sie auch immer gereitzt seyn mögen, wenn sie nur nach dieser Axe zu gerichtet oder ihr parallel sind, die Summe von den Produkten aus der Masse jedes Körpers durch den Inhalt, welchen sein Projection auf einer auf der nemlichen Axe senkrechten Ebene um diese Axe beschreibt, immer der Zeit proportional.

Wenn daher das System sich frey auf irgend eine Art um einen festen Punkt drehen kann, und außer der gegenseitigen Wirkung der Körper, jeder von ihnen noch durch eine beliebige nach diesen Punkt zielende Kraft gereitzt würde, so würde das nemliche Gesetz der Inhalte in Beziehung auf alle Axen welche durch diesen Punkt gehen statt haben. Man hätte also für diesen Fall, wenn dieser Punkt für den Ursprung der Cordinaten genommen wird, in Beziehung auf die drey Axen der Cordinaten, folgende drei Gleichungen von der ersten Ordnung (vorhergehende no.)

$$M(xy'-yx')+N(\xi\eta'-\eta\xi')+\text{u. s. w.}=C$$
$$M(xz'-zx')+N(\xi\zeta'-\zeta\xi')+\text{u. s. w.}=D$$
$$M(yz'-zy')+N(\eta\zeta'-\zeta\eta')+\text{u. s. w.}=E$$

wo C, D, E, willkührliche beständige Größen sind.

217.

Wenn das System ganz frey wäre, und wenn es

keine festen Punkte hätte, so würden diese Gleichungen und folglich auch das Gesetz der Inhalte in Absicht auf einen beliebigen für den Ursprung der Coordinaten angenommenen Punkt statt haben, so wie auch für alle Axen welche man durch diesen Punkt gehen läßt.

Es würde noch immer das nemliche bleiben, in dem Fall, wenn der in redestehende Punkt statt im Raum befestigt zu seyn, irgend eine geradlinigte und gleichförmige Bewegung hätte. In der That, wir wollen annehmen, daß er in der Zeit t die Räume αt, βt, γt, nach der Richtung der Axen der xs der ys u. zs durchliefe, wo α, β, γ beständige Größen sind, und p, q, r mögen die Coordinaten des Körpers M, ϰ, λ, ϱ die des Körpers N u. s. w. auf dieser nemlichen für ihren Ursprung genommenen Punkt bezogen, seyn, so ist klar, daß man alsdenn hat

$$p = x - \alpha t,\ q = y - \beta t,\ r = z - \gamma t$$

und eben so

$$\varkappa = \xi - \alpha t,\ \lambda = \eta - \beta t,\ \varrho = \zeta - \gamma t;$$

und so mit andern. Man hat also

$$pq' - qp' = (x - \alpha t)(y' - \beta) - (y - \beta t)(x' - \alpha)$$
$$= xy' - yx' - \alpha(ty' - y) + \beta(tx' - x),$$

und eben so

$$\varkappa\lambda' - \lambda\varkappa' = \xi\eta' - \eta\xi' - \alpha(t\eta - \eta) + \beta(t\xi' - \xi);$$

und so mit andern ähnlichen Formeln. Man wird also haben

$$M(pq' - qp') + N(\varkappa\lambda' - \lambda\varkappa') + \text{u. s. w.}$$
$$= M(xy' - yx') + N(\eta\xi' - \xi\eta) + \text{u. s. w.}$$
$$- \alpha t(My' + N\eta' + \text{u. s. w.}) + \alpha My + (N\eta + \text{u. s. w.})$$
$$+ \beta t(Mx' + N\xi' \text{ u. s. w.}) - \beta(Mx + N\xi + \text{u. s. w.})$$

Denn in diesem Fall (Nr. 211 und 213)

Mx

$$Mx + N\xi + \text{u. ſ. w.} = at + b,$$
$$My + N\eta + \text{u. ſ. w.} = ct + d;$$

ſind a, b, c, d beſtändige Größen: es wird alſo, wenn man dieſe Subſtitutionen macht

$$M(pq' - qp') + N(\varpi\chi' - \chi\varpi') + \text{u. ſ. w.}$$
$$= M(xy' - yx') + N(\xi\varpi' - \varpi\xi') + \text{u. ſ. w.}$$
$$+ \alpha d - \beta h = C + \alpha d - \beta b.$$

Folglich iſt die Größe

$$M(pq' - qp') + N(\varpi\chi - \chi\varpi') + \text{u. ſ. w.}$$

noch beſtändig; mithin iſt die Summe der um die Axe der r, welche durch den bewegten Punkt geht, beſchriebenen Inhalte, jeden durch die reſpective Maſſe multiplizirt, auch der Zeit proportional.

Man findet auf dieſelbe Art, daß die beyden andern Größen

$$M(pr' - rp') + N(\varpi\varrho' - \varrho\varpi') + \text{u. ſ. w.}$$
$$M(qr' - rq') + N(\chi\varrho' - \varrho\chi') + \text{u. ſ. w.}$$

beſtändig ſind, und daß alſo die Summe der um die Axen der qs und ps, die durch den nemlichen bewegten Punkt gehen, beſchriebenen Inhalte, jeden durch die reſpective Maſſe multiplicirt, auch noch der Zeit proportional iſt.

Da alſo in den in redeſtehenden Fall, der Schwerpunkt des Syſtems nur eine geradlinigte und gleichförmige Bewegung haben kann (Nr. 213) ſo folgt hieraus, daß das Geſetz der Inhalte in Abſicht auf den Mittelpunkt der Schwere und für alle Axen die man durch dieſen Mittelpunkt gehen läßt ſtatt haben wird.

Wir bemerken noch, daß das Geſetz der Inhalte, wovon wir ſprechen, eben ſo wie das Geſetz der Bewegung des Mittelpunkts der Schwere ſtatt hat, und aus demſelben Grunde (213) wenn in den Bewegungen des

Syſtems plötzliche Veränderungen durch die gegenſeitige Wirkung der Körper, woraus es zuſammengeſetzt iſt, dazu kommen. Alſo kann man das nemliche Geſetz, ſowohl auf den Stoß der harten als auch den der elaſtiſchen Körper anwenden.

194.

Welches auch immer die Bedingungen des Syſtems ſeyn mögen, ſo werden die Bedingungs-Gleichungen

$$f(x, y, z, \xi \ldots) = 0$$
$$\varphi(x, y, z, \xi \ldots) = 0 \text{ u. ſ. w.}$$

immer, wenn man die Erſtefunktionen in Beziehung auf die Zeit t nimt, wovon die veränderlichen Größen x, y u. ſ. w. Funktionen ſind.

$$x'f'(x)+y'f'(y)+z'f'(z)+\xi'f'(\xi)+\eta'f'(\eta)+\zeta'f'(\zeta)+ \text{ u. ſ. w.} = 0$$
$$x'\varphi'(x)+y'\varphi'(y)+z'\varphi'(z)+\xi'\varphi'(\xi)+\eta'\varphi'(\eta)+\zeta'\varphi'(\zeta)+ \text{ u. ſ. w.} = 0$$

geben, und ſo weiter.

Denn wenn das Syſtem nur die Würkung der Kräfte empfindet, welche aus dieſen Bedingungen entſtehen, ſo werden die Gleichungen der Bewegung der Körper M, N, u. ſ. w. von der Form (Nr. 208)

$$Mx'' = \Pi f'(x) + \Phi \varphi'(x) + \text{u. ſ. w.}$$
$$My'' = \Pi f'(y) + \Phi \varphi'(y) + \text{u. ſ. w.}$$
$$Mz'' = \Pi f'(z) + \Phi \varphi'(z) + \text{u. ſ. w.}$$
$$N\xi'' = \Pi f'(\xi) + \Phi \varphi'(\xi) + \text{u. ſ. w.}$$
$$N\eta'' = \Pi f'(\eta) + \Phi \varphi'(\eta) + \text{u. ſ. w.}$$
$$N\zeta'' = \Pi f'(\xi) + \Phi \varphi'(\xi) + \text{u. ſ. w.}$$

u. ſ. w. ſeyn.

Multiplicirt man dieſe Gleichungen reſpective durch x', y', z', ξ', η', ζ', u. ſ. w. und addirt ſie zuſammen, ſo

hat

Hat man dieſe

$M(x'x''+y'y''+z'z'')+N(\xi'\xi''+\eta'\eta''+\zeta'\zeta'')+$ u. ſ. w. $=0$,

die ganz unabhängig von den Bedingungen des Syſtems iſt, und welche daher ganz allgemein ſtatt haben wird, welches auch immer die Lage und die gegenſeitige Verbindung der Körper welche es auszumachen, ſeyn mag.

Die urſprüngliche Gleichung dieſer Gleichung iſt

$M(x'^2+y'^2+z'^2)+N(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)+$ u. ſ. w. $=H$

in welcher H eine willkührliche beſtändige Größe iſt. Denn wir haben geſehen (Nr. 195) daß

$$\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)}$$

die Geſchwindigkeit des Körpers ausdrückt, welcher die Curve deren Coordinaten x, y, z ſind, beſchreibt; wenn man alſo u die Geſchwindigkeit des Körpers M, und v die des Körpers N nennt, und ſo mit andern, ſo hat man

$$x'^2+y'^2+z'^2=u^2,$$
$$\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2=v^2,$$

u. ſ. w. und die vorhergehende Gleichung wird

$$Mu^2+Nv^2+\text{u. ſ. w.}=H.$$

In dem berühmten Streit über die Schätzung der Kräfte, nennte man **lebendige Kraft** eines bewegten Körpers, das Produkt aus ſeiner Maſſe in das Quadrat ſeiner Geſchwindigkeit. Behält man alſo dieſe Benennung bey, ſo ſieht man aus der oben gefundenen Gleichung, daß die Summe der lebendigen Kräfte von allen Körpern eines Syſtems, beſtändig iſt, wenn dieſe Körper keine andern Wirkungen empfinden, als die, welche aus ihrer Verbindung, und überhaupt von allen Bedingungen welche durch Gleichungen zwiſchen den verſchiedenen Coordinaten des Körpers, ohne daß die Zeit mit hinein-

kommt

kommt, entstehen. Und in diesem Gesetz besteht das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte.

220.

Wenn die Körper ferner aufeinander durch beliebige Attractions- oder Repulsions-Kräfte würkten, so würden diese Kräfte in der That, Glieder von der nemlichen Form $\Pi f'(x)$, $\zeta f'(y)$ u. s. w. in den Werthen der Größen Mx'', My'' u. s. w. geben, wenn man für die Funktion $f(x, y \ldots.)$ die Entfernung

$$\sqrt{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]}$$

der beyden Körper, und für Π die absolute Kraft nimt, welche diese Körper auf einander ausüben (Nr. 209); es ist aber augenscheinlich, daß die Bedingung

$$x'f'(x) + y'f'(x) + \text{u. s. w.} = 0$$

für diese Funktion sowohl, als für diejenigen, welche aus den Bedingungen des Systems entstehen nicht statt haben wird. Diese Glieder werden also in der von den Bedingungen des Systems unabhängigen Gleichung bestehen, und man hat also

$$M(x'x'' + y'y'' + z'z'') + N\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'') + \text{u. s. w.} =$$
$$\Pi [x'f'(x) + y'f'(y) + z'f'(y) + \xi'f'(\xi) + \eta'f'(\eta) + \zeta'f'(\zeta)] + \text{u. s. w.}$$

wo man sieht, daß die Größe

$$x'f'(x) + y'f'(y) + \text{u. s. w.}$$

die Erstenfunktion in Beziehung auf t von der Funktion $f(x, y, z, \xi \ldots.)$ ist, welche hier

$$\sqrt{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]}$$

ist.

Wenn man also ganz allgemein durch p die gerodlinigte Entfernung der Körper M und M und durch P die absolute Attractions- oder Repulsionskraft bezeichnet, welche

welche die Körper auf einander ausüben, wenn man ferner durch q die geradlinigte Entfernung zwischen zwey Körpern des Systems, und durch Q die absolute Attractions- oder Repulsionskraft dieser beiden Körper bezeichnet, und so weiter, so wird, wenn man die Größen P, Q u. s. w. positiv nimmt, wenn sie sich bestreben die Entfernungen p, q u. s. w. zu vergrößern, und negativ, wenn sie sich bestreben diese Entfernungen zu vermindern, und wenn die Geschwindigkeiten der Körper M, N u. s. w. u, v u. s. w. genannt werden, die vorhergehende Gleichung

$$M u v' + N v v' + \text{u. s. w.} = P p' + Q q' + \text{u. s. w}$$

welche zwar unabhängig von den Bedingungen des Systems ist, aber doch, wie man sieht, die gegenseitige Attractions- oder Repulsionskräfte P, Q u. s. w. enthält.

221.

Endlich, wenn die Körper zu gleicher Zeit gegen feste Mittelpunkte angezogen, oder von diesen Mittelpunkten abgestoßen würden, so hat noch die nemliche Gleichung statt, wenn man zum Beyspiel p für die Entfernung des Körpers M von einem festen Punkt, und P für die Kraft nimmt, welche von diesem Mittelpunkt herkommt; und so mit andern. Denn man kann den Fall, der nach festen Mittelpunkten strebenden Kräfte, von dem der gegenseitigen Würkungen der Körper herleiten, wenn man annimmt daß einige von diesen Körpern unbeweglich werden, welches statt findet wenn ihre Massen unendlich sind; aber ohne Zuflucht zu diesem indirecten Beweise zu nehmen, braucht man nur zu überlegen, daß wenn z. B. der Körper M die Wirkung einer Kraft P empfindet, welche von einem festen der Lage nach

nach durch die Coordinaten l, m, n gegebenen Punkt ausgeht, und deren Entfernung von M, p iſt, ſo werden daraus (no. 206.) in den Werthen der Größen Mx'', My'', Mz'', die reſpectiven Glieder

$$\frac{P(x-l)}{p}, \quad \frac{P(y-m)}{p}, \quad \frac{P(z-n)}{p}$$

entſtehen, und folglich in den Werthen von

$M(x'x'' + y'y'' + z'z'')$ oder von Muv'

die Glieder

$$\frac{P(x-l)x'}{p} + \frac{P(y-m)y'}{p} + \frac{P(z-n)z'}{p}$$

da aber

$$p = \sqrt{[(x-l)^2 + (y-m)^2 + (z-n)^2]}$$

iſt, ſo hat man

$$p' = \frac{(x-l)x' + (y-m)y' + (z-n)z'}{p};$$

folglich reduciren ſich die in rede ſtehenden Glieder auf $P'p$.

Woraus man ganz allgemein ſchließen wird, daß die Gleichung

$$Muu' + Nvv' + \text{u. ſ. w.} = Pp' + Qq' + \text{u. ſ. w.}$$

für jedes Syſtems von Körpern ſtatt hat, die auf irgend eine Art geſtet oder verbunden ſind, und welche ſich gegenſeitig anziehen oder zurückſtoßen, oder gegen feſte Punkte angezogen, oder durch beliebige Kräfte P, Q u. ſ. w. zurückgeſtoßen werden, wenn man die wechſelſeitigen Entfernungen der ſich anziehenden, oder zurückſtoßenden Kräfte oder ihrer Entfernungen von den feſten anziehenden oder zurückſtoßenden Mittelpunkten p, q u. ſ. w. nennt, und wenn man die Größen P, Q u. ſ. w. poſitiv oder negativ nimmt, je nachdem dieſe Kräfte zurückſtoßende oder anziehende ſind, weil erſtere, die Entfernungen

p, q u. ſ. w. zu vergrößern und letztere ſie zu beringern ſtreben.

222.

Wenn die Kräfte P, Q u. ſ. w. reſpective, beliebige Funktionen von den Entfernungen p, q u. ſ. w. nach welchen ſie würken, ſind, welches man immer annehmen kann, wenn dieſe Kräfte von einander unabhängig ſind, oder überhaupt, wenn die Größen P, Q u. ſ. w. eben ſo Funktionen von p, q u. ſ. w. ſind als die Größe

$$P p' + Q q' + \text{u. ſ. w.}$$

die Erſtefunktion einer Funktion von p, q u. ſ. w. iſt, welche wir durch

$$F(p, q \ldots.)$$

bezeichnen wollen, ſo wird die urſprüngliche Gleichung der obigen Gleichung

$$M u^2 + N v^2 + \text{u. ſ. w.} = K + 2F(p, q \ldots.)$$

ſeyn, wo K eine willkührliche beſtändige Größe iſt; und die Kräfte P, Q u. ſ. w. welche nach den Linien p, q u. ſ. w. würken, werden durch die Erſtefunktionen

$$F'(p),\ F'(q),\ \text{u. ſ. w.}$$

vorgeſtellt ſeyn.

Es mögen a, b u. ſ. w. die Werthe von p, q u. ſ. w. in einen gegebenen Augenblick, und U, V u. ſ. w. die Geſchwindigkeiten von M, N u. ſ. w in dieſen Augenblick ſeyn, ſo wird die vorhergehende Gleichung auf dieſen nemlichen Augenblick bezogen,

$$M U^2 + N V^2 + \text{u. ſ. w.} = K + 2F(a, b \ldots.)$$

geben, woraus man zieht

$$K = M U^2 + N V^2 + \text{u. ſ. w.} - 2F(a, b \ldots.);$$

ſubſtituirt man nun dieſen Werth, ſo hat man die allgemeine Gleichung

$$M u^2 + N v^2 + u. \text{ ſ. w.} = M U^2 + N V^2 + u. \text{ ſ. w.} + 2F(p, q, \ldots) - 2F(a, b, \ldots)$$

Dieſe Gleichung enthält das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte, in ſeiner ganzen Allgemeinheit genommen. Sie zeigt daß die ganze lebendige Kraft des Syſtems nur von activen Kräften welche die Körper reizen, und von der Lage der Körper in Beziehung auf den Mittelpunkt dieſer Kräfte, abhänge; ſo daß, wenn in einem Augenblick die Körper von dieſen Mittelpunkte gleich weit entfernt ſind, auch die Summe ihrer lebendigen Kräfte die nemliche ſeyn wird.

Ich verſtehe unter active Kräfte, die Kräfte welche die Körper aufeinander ausüben, und deren Effect iſt, daß ſie ihre Entfernungen oder ihre reſpective Lagen verändern, wie die innern Kräfte der Attraction oder der Repulſion, die Kräfte der zwiſchen den Körpern angebrachten Federn, u. ſ. w. Im Gegentheil, ich nenne paſſive Kräfte, die Kräfte des Widerſtandes, welche durch den Druck der Körper hervorgebracht werden, die Ausdehnung der Fäden oder der Ruthen u. ſ. w., und deren Effect iſt, daß ſie die Körper in der nemlichen reſpectiven Lage erhalten, und verhindern, daß die Bedingungen des Syſtems nicht verletzt werden. Dieſe paſſiven Kräfte tragen, wie man ſieht zur Hervorbringung der lebendigen Kraft nichts bey; nur die activen Kräfte allein vermehren oder vermindern die lebendige Kraft, wie ſie es thun würden, wenn die Körper, nachdem ſie frey bewegt ſind, von einerlei Punkten ausgiengen und zu den nemlichen Punkten wieder zurückkehrten, indem ſie beliebige Linien beſchreiben.

223.

Wir haben geſehen daß das Geſetz der Bewegung des Mittel-

Mittelpunkts der Schwere sowohl, als das der Flächeninhalte, unabhängig von den gegenseitigen Würkungen der Körper sind, welches aus dieser Würkung sey, sie mag von passiven oder activen Kräften herkommen; es haben also diese beiden Gesetzte in dieser Hinsicht eine weit größere Ausdehnung als das Gesetzte von der Erhaltung der lebendigen Kräfte, welches nur von der Würkung der passiven Kräfte unabhängig ist. Es folgt hieraus, daß dieses letzte Gesetz nicht bestehen kann, wie die beiden ersten, in dem Fall nemlich wo durch die gegenseitige Würkung der Körper oder durch sich ereignende Hinderniſſe, plötzliche Veränderungen in ihren Bewegungen entstehen, weil d... Veränderungen immer der Effekt activer Kräfte von... schen den Körpern oder zwischen ihnen und den Hinder... sen angebrachten Federn, sind oder dafür angesehen we... den können, und welche, indem sie sich etwas zusammen ziehen oder ausdehnen, das Gesetz der Stetigkeit in den Veränderungen der Bewegung beobbehalten. Die lebendige Kraft der Körper welche also plötzliche Veränderungen aushalten, erhält bey jeder dieser Veränderungen, einen Zuwachs oder eine Abnahme gleich der lebendigen Kraft, welche durch die Würkung dieser Federn hervorgebracht würde wenn die Körper blos dieser Würkung unterworfen wären.

Wenn daher die Körper M, N u. s. w. sich begegnen oder Hinderniſſe antreffen, dargestellt daß dadurch plötzliche Veränderungen in ihren Bewegungen entstehen; so könnte man auf dieseKörper,während ihrer Würkuug so kurz wie sie auch seyn könnte, die Formeln der vorhergehenden Nummer anwenden; so daß wenn man ihre Geschwindigkeiten im Anfang der Würkung U, V u. s. w. und die Geschwindigkeiten am Ende der Würkung u, v u. s. w. nennt,

und ferner durch a, b u. ſ. w. die Werthe der Entfernungen p, q u. ſ w. im Anfange, und durch α, β u. ſ. w. ihre Werthe am Ende der nemlichen Würkung, bezeichnet, man

$$MU^2 + NV^2 + \text{u. ſ. w.} - Mu^2 - Nv^2 - \text{u. ſ. w.} = 2F(a, b\ldots.) - 2F(\alpha, \beta\ldots.)$$

haben wird.

Dies zeigt daß der Unterſchied der lebendigen Kräfte am Anfange und am Ende der Wirkung

$$2F(a,b\ldots.) - 2F(\alpha, \beta, \ldots.)$$

ſeyn wird, wo man bemerkt daß, obgleich die Größen α, β u. ſ. w. wenig von den Größen a, b u. ſ. w. unterſchieden ſind, der Unterſchied der ähnlichen Funktionen $F(a, b, \ldots c)$ und $F(\alpha, \zeta\ldots.)$ dennoch einen beliebigen endlichen Werth haben kann.

224.

Da dieſe Funktionen unbekannt ſind, ſo könnte man dieſe Art die Veränderung der lebendige Kraft nicht beſtimmen; in beſondern Fällen aber, wird man ſie aus den Bedingungen des Problens finden können.

Wenn ſich Körper unmittelbar oder durch die Dazwiſchenkunft eines Hebels oder beliebiger Maſchienen, ſtoßen, ſo geſchieht, wenn die Körper vollkommen elaſtiſch ſind, das Zuſammendrücken und die Wiederherſtellung nach dem nemlichen Geſetz, und man denkt ſich die Würkung ſo lange, bis die Körper durch die Wiederherſtellung der Federn wieder dieſelbe relative Lage angenommen hat welche ſie vor dem Anfange des Drucks hatten. Man hat daher für dieſen Fall, in der vorhergehenden Gleichung, $\alpha = a$, $\zeta = b$ u. ſ. w. und mithin

$$F(\alpha, \zeta\ldots.) = F(a, b\ldots.)$$

woraus folgt, daß die lebendige Kraft vor und nach dem

Stoß

Stoß die nemliche seyn wird; dieses wußte man zwar schon lange, hatte aber, wie ich weiß, hiervon noch keinen einfachen und allgemeinen Beweis.

Umgekehrt, bey dem Stoß der harten Körper denkt man sich nur die Wirkung so lange, bis die Körper Geschwindigkeiten erlangt haben vermöge welchen sie sich nicht mehr vernichten, und welche folglich, keine Wirkung unter sich hervorbringen. Wenn also der Effekt dieser Geschwindigkeiten auf die gegenseitige Wirkung der Körper, Null ist, und man ihnen diese nemlichen Geschwindigkeiten vor der Wirkung mittheilte, so wird sie vermöge der zusammengesetzten Geschwindigkeiten von diesen hier und der eigenen Geschwindigkeiten der Körper die nemliche seyn. Sie wird also auch noch dieselbe seyn, wenn die eingedrückte Geschwindigkeiten gleich und directe denen, wovon wir reden, entgegengesetzt wäre, denn die Wirkung wird sich nicht verändern, wenn man vorausetzt daß man diese eingedrückten Geschwindigkeiten durch entgegensetzten Geschwindigkeit vernichtet.

Es folgt hieraus, daß bey den Stoß der harten Körper, die Geschwindigkeiten u, v u. s. w nach dem Stoß so beschaffen seyn müssen, daß wenn man den Körpern M, N u. s. w. diese nemlichen Geschwindigkeiten im entgegengesetzten Sinne mittheilt, die Gleichung

$$MU^2 + NV^2 + \text{u. s. w.} - Mu^2 - Nv^2 \text{ u. s. w.} = 2F(a,b\ldots.) - 2F(\alpha,\beta\ldots.)$$

von der vorigen Nummer alsdenn noch besteht. Denn da die Glieder welche davon die zweite Hälfte ausmachen, nur von der gegenseitigen Wirkung der Körper abhängen, so bleiben sie nothwendig die nemlichen; mithin wird der Werth von

$MU^2 + NV^2 +$ u. ſ. w. $- Mu^2 - Nv^2 -$ u. ſ. w.

bey der Zuſammenſetzung der Geſchwindigkeiten U, V u. ſ. w. u, v u. ſ. w. mit den Geſchwindigkeiten $-u, -v$, u. ſ. w. nicht verändert. Nennt man alſo A die aus U und $-u$, und B die aus V und $-v$ zuſammengeſetzte Geſchwindigkeit u. ſ. w. ſo hat man die Gleichung

$$MU^2 + NV^2 + \text{u. ſ. w.} - Mu^2 - Nv^2 - \text{u. ſ. w} =$$
$$MA^2 + NB^2 + \text{u. ſ. w.}$$

weil die zuſammengeſetzten Geſchwindigkeiten $u - u$, $v - v$ u. ſ. w. Null ſind.

Da die Geſchwindigkeiten vor dem Stoß U, V u. ſ. w. und die Geſchwindigkeiten nach demſelben u, v, ſind, ſo iſt klar, daß die durch den Stoß verlohrne Geſchwindigkeiten, A, B u. ſ. w. ſeyn werden; folglich iſt

$$MA^2 + NB^2 + \text{u. ſ. w.}$$

die lebendige Kraft welche aus dieſen Geſchwindigkeiten entſpringt; woraus man folgenden Schluß zieht: daß bey dem Stoß der harten Körper ſo viel von den lebendigen Kräften verlohren geht, als die lebendige Kraft beträgt welche dieſe nemliche Körper haben würden, wenn jeder mit der Geſchwindigkeit welche er bey den Stoß verliehrt, gereitzt würde. Dieſes merkwürdige Theorem gehört wie ich glaube, dem Carnot, welcher es auf eine andere Art in ſeinen Verſuchen über Maſchinen überhaupt, gefunden hat; es iſt nothwendig um die Gleichung der lebendigen Kräfte zu ergänzen, in den Fällen wo durch den Stoß, von dieſen Kräften etwas verlohren geht.

225.

In der Gleichung von no: 221

$$Muu' + Nvv' + \text{u. ſ. w} = Pp' + Qq' + \text{u. ſ. w.}$$

bezeichnen die Größen p, q u. ſ. w die geradlinigte Entfernungen der Punkte, wo die Kräfte P, Q u. ſ. w angebracht ſind, von den Mittelpunkten dieſer Kräfte; alſo

drücken

drücken die Größen p', q' u. ſ. w. die Geſchwindigkeiten dieſer Punkte, nach der Richtuug dieſer nemlichen Kräfte, aus, und da die Größen p, q u. ſ. w. nicht in der Gleichung mit hineinkommen, ſo folgt daß dieſe Gleichung immer ſtatt haben wird, was auch immer die Kräfte P, Q u. ſ. w. ſeyn mögen, ſie mögen nach gegebenen Punkten ſtreben oder nicht, wenn man nur für p', q' u. ſ. w. die reſpektiven Geſchwindigkeiten der Punkte nimmt, wo dieſe Kräfte nach der Richtung der Kräfte ſelbſt angebracht ſind.

Wenn die Kräfte P, Q u. ſ. w. im Gleichgewicht wären, ſo wird nach dem Princip der virtuellen Geſchwindigkeiten (no. 210) die Größe $Pp' + Qq' +$ u. ſ. w.

Null: alſo zeigt die vorſtehende Gleichung, was aus dieſer Größe werden wird, wenn die Kräfte eine Bewegung hervorbringen; und man ſieht daß ſie alsdenn der Erſtenfunktion von der Hälfte der lebendigen Kraft aller Körper im Syſteme, gleich wird, welches auch noch überdem die Lage und gegenſeitige Verbindung dieſer Körper ſeyn mag.

Wenn alſo in einem Augenblicke die Kräfte welche auf das Syſtem wirken außer dem Gleichgewicht kommen, (contrebalancer) ſo wird die Erſtefuuktion der lebendigen Kraft Null, und mithin die lebendige Kraft ein Maximum oder ein Minimum ſeyn (no. 131). Ueberhaupt von allen Lagen die das Syſtem annehmen kann, iſt diejenige wo es im Gleichgewicht iſt, auch mit der wo deſſen lebendige Kraft ein Maximum oder ein Minimum wird, wenn es in Bewegung wäre, einerley; und es iſt bewieſen, daß das Gleichgewicht beſtändig (ſtable) ſeyn wird, wenn die lebendige Kraft ein Maximum iſt und nicht beſtändig wenn die lebendige Kraft ein Minimum iſt. Aber der Beweis dieſer beſonderen (ſingulière) Eigenſchaft des Gleichgewichts kann hier nicht eingerückt werden. Siehe die Analyſiſche Mechanik.

226.

226.

Da die Größen p′ q′ u. ſ. w. nur die Geſchwindigkeiten der Punkte ausdrücken, an welchen die Kräfte P Q u. ſ. w. angebracht ſind, nach der Richtung dieſer Kräfte geſchätzt, ſo kann man für p, q u. ſ. w. die durch dieſe Punkte, nach dieſen Richtungen gemeinſchaftlich durchlaufenen Räume nehmen. Alſo iſt P p′ die Erſtefunktion von dem Inhalt derjenigen Curve, deren Abſciſſe gleich p und rechtwinkelige Ordinate gleich P iſt, und eben ſo wird Q q′ die Erſtefunktion von dem Inhalt einer Curve ſeyn, deren Abſciſſe q und Ordinate Q iſt; und ſo mit andern (no. 135.) u. ſ. w. Bezeichnet man daher reſpective die Flächeninhalte durch (P), (Q), u. ſ. w. und nimmt die urſprünglichen Funktionen von den beiden Hälften der in redeſtehenden Gleichung (vorhergehende Nummer) ſo wird, wenn man durch 2 multiplicirt, und U, V die Geſchwindigkeiten von M, N u. ſ. w. nennt, wenn die Flächeninhalte (P), (Q) als anfangend gedacht werden,

$$Mu^2 + Nv^2 + \text{u. ſ. w.} = MU^2 + NV^2 + \text{u. ſ. w.} = 2(P) + 2(Q) \text{ u. ſ. w.}$$

Dieſe Gleichung iſt mit der von no. 222. einerley, welche das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte enthält; ſie iſt aber hier auf eine von den Funktionen unabhängige Art dargeſtellt, welche die Kräfte P, Q u. ſ. w. vorſtellen können.

Wenn man annimmt daß dieſe Kräfte jede beſonders auf freye Körper deren Maſſen m, n u. ſ. w. ſind, würken, ſo hat man aus den Fundamental-Gleichungen von no. 199., $mp'' = P$, $nq'' = Q$; multiplicirt man reſpective durch $2p'$, $2q'$ u. ſ. w. und nimmt hievon die urſprünglichen Funktionen, ſo hat man

mp'^2

$$mp'^2 = a + 2[P],$$
$$nq'^2 = b + 2[Q]$$

und so mit den andern, wo a und b willkührliche beständige Größe sind. Nimmt man daher mehrerer Einfachheit wegen an, daß die Geschwindigkeiten p', q' u. s. w. Null sind, wenn die Flächeninhalte [P], (Q) u. s. w. anfangen, so ist a = o, b = o, u. s. w.; und folglich

$$mp'^2 = 2[P], nq'^2 = 2[Q], \text{ u. s. w.}$$

wo man sieht daß mp'^2, nq'^2 u. s. w. diejenigen lebendigen Kräfte sind, welche durch die Kräfte P, Q, u. s. w. besonders und frey, während der Erzeugung der Flächeninhalte hervorgebracht sind; so daß die Flächeninhalte selbst, der Hälfte der lebendigen Kräfte welche die Inhalte hervorgebracht haben gleich sind.

Wenn also diese Kräfte auf beliebig mit einander verbundene Körper würken, so bringen sie im ganzen System eine Vermehrung der lebendigen Kraft hervor, gleich der Summe der lebendigen Kräfte welche jede Kraft für sich hervorbringen würde, wenn sie allein auf einen freyen Körper würkte, und welche ihm nach ihrer Richtung einen Raum durchlaufen ließe, gleich dem, welchen der Körper würklich nach der nemlichen Richtung durchläuft. Hieraus besteht eigentlich das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte.

227.

Dies Gesetz der lebendigen Kräfte ist in der Theorie der Maschienen, von einer großen Wichtigkeit. Der allgemeine Gegenstand der Maschinen ist, die Würkung der bewegenden Kräfte so anzubringen (transmettre), daß auf die schicklichste Art die Widerstände überwunden werden

den, welche sich der hervorzubringenden Bewegung entgegen setzen. Diese Widerstände sind nichts als Kräfte die in einem, dem der Kräfte entgegengesetzten Sinn würken, man kann sie als negative Kräfte ansehn und behandeln. Es ist also bey jeder in Bewegung gesetzten Maschine die Vermehrung der ganzen lebendigen Kraft immer der Summe der lebendigen Kräfte gleich, welche die Kräfte hervorgebracht haben würden, weniger der Summe derjenigen, welche durch die Widerstände hätten hervorgebracht werden können, wenn die Punkte auf welchen diese Kräfte würken, sich frei bewegt hätten.

Man kann beinahe alle Kräfte die unter unsrer Gewalt stehen auf die Schwerkraft und Federkraft reduciren. Ein Gewicht P, welches frei von der Höhe herabfällt, erlangt eine lebendige Kraft gleich 2 P h; denn in diesem Fall ist die Kraft P beständig, der Flächeninhalt (P) ist gleich dem Producte aus der Ordinate P und der Abscisse h (no. 226.). Wenn man also einen senkrechten Fall h eines Gewichts P in seiner Gewalt hat, so kann man eine lebendige Kraft gleich 2 P h überwinden [dépenser], welche bei einer Maschine als Kraft oder Last angewandt werden kann. Eine gespannte Feder, bringt indem sie sich abwickelt, eine lebendige Kraft hervor, welche von der Kraft der Feder und von dem Raume um welchen sich die Feder abspannen kann, der dem doppelten Inhalt (P) gleich ist, abhängt (no. 226.). Hat man daher eine bis zu einem gewissen Punkt gespannte Feder die sich um einen gegebenen Raum abspannen kann, in seiner Gewalt, so ist man vermögend eine gegebene Kraft zu überwinden und sie in irgend einer Maschine anzubringen. Man kann daher sagen, daß ein Wasserfall dessen Menge und

Höhe

Höhe gegeben sind; daß eine gegebene Menge Kohlen, in so weit sie gebraucht wird, eine gegebene Menge Wasser zu verdunsten; daß eine zu einem Geschütz gegebene Menge Pulver; daß die Tagearbeit eines gegebenen Thieres u. s. w. eine bestimmte Menge von lebendiger Kraft enthalten, die man zwar anwenden, aber durch keine mechanischen Mittel vermehren kann.

Man kann also eine Maschine als bestimmt ansehen, eine gegebene Menge von lebendiger Kraft zu zerstören, indem sie eine andere gegebene lebendige Kraft verzehrt. Und es folgt aus dem Hauptprincip, daß die lebendige Kraft der bewegenden Kräfte, die Widerstände übertreffen muß, und zwar um die Größe um welcher die ganze lebendige Kraft aller Körper welche sich vermöge dieser Kraft bewegen, zunimmt, während daß diese nemlichen lebendigen Kräfte sich verzehren; und wenn in ihren Bewegungen plötzliche Veränderungen entständen, so müßte man die Summe der lebendigen Kräfte welche aus dem beim Stoß verlohrnen Geschwindigkeiten entstehen, hinzusetzten (no 224.).

Man kann auf die Art den Effect einer jeden Maschine berechnen, und die nöthigen Bedingungen bestimmen, damit dieser Effect, in Beziehung auf die Umstände der gegebenen Maschine der größtmöglichste w...

228.

Ich dehne mich nicht weiter über die Anwendungen die Mechanik aus, und will mich nicht damit aufhalten besondere Probleme aufzulösen. Da es mein Plan nicht ist, eine Abhandlung über die Mechanik zu geben, so begnüge ich mich, die Fundamental Principien und Gleichungen der Bewegung von der Theorie der Funktionen abgeleitet zu haben, da man sie gewöhnlich nur durch

die Betrachtung der unendlich kleinen Größen beweißt. Ich hatte mir vorgenommen, in einem dritten Theile, die Uebereinſtimmung des Differenzial-Calculs mit der Theorie der Funktionen zu zeigen, und darin ſehen zu laſſen, daß die Methode der unendlich kleinen Größen nichts als ein auf dieſer Theorie gegründetes ſinnreiches Inſtrument iſt, und blos dazu beſtimmt iſt, die davon abhängenden Operationen zu verkürzen; da aber dieſe Zuſammenbringungen (raprochements) nicht ſchwer ſind, ſo überlaſſe ich es, um dieſes Werk nicht zu ſehr zu vergrößern, denjenigen unter meinen Leſern welche den Differenzial-Calcul inne haben; und überdem glaube ich durch die [illegible]e Abhandlung des Differenzial-Calculs von Lacrois [illegible]ſn überhoben zu ſeyn, wo dieſer Calcul unter allen [illegible]ten Geſichtspunkten dargeſtellt, und mit allem Detail [illegible]n man nur verlangen kann, auseinander geſetzt iſt.

Zuſatz.

Ueber das Princip der virtuellen Geſchwindigkeiten von J. L. Lagrange.

In den Beweiſen, welche man von dem Princip der virtuellen Geſchwindigkeiten gegeben hat, läßt man es von dem Princip der Zuſammenſetzung der Kräfte, oder von dem des Gleichgewichts vom Hebel abhängen. Dieſe beyden Principien ſind in der That die gewöhnlichen Grundpfeiler der Statik; man weiß aber, daß ſie nicht evident genug ſind, um nicht ſelbſt noch einen Beweis nöthig zu haben. Es giebt ein anderes Princip welches auch zur Baſis der Wiſſenſchaft des Gleichgew ich

gewichts dienen kann; und welches mit dem Vorzug, an sich selbst evident zu seyn, noch den verbindet, daß es direct zum Princip der virtuellen Geschwindigkeit führt es ist das Princip von dem Gleichgewicht der Kloben.

Wenn mehrere Rollen mit einander in einer Hülse vereinigt sind, so nennt man diese Verbindung Kloben; und die Verbindung zweyer Kloben, einer unbeweglichen und einer beweglichen, mit einem Strick umgeben, wovon das eine Ende befestigt ist, und das andere mit einer Kraft gezogen wird, bildet eine Maschine, in welcher sich die Kraft zu dem von dem Kloben getragenen Gewicht, verhält wie die Einheit zur Anzahl der Stricke welche diesen Kloben berühren, indem man sie alle parallel annimmt, und von der Friction und von der Steifigkeit der Stricke abstrahirt: denn es ist sichtbar, daß, wegen der gleichförmigen Spannung des Stricks seiner ganzen Länge nach, das Gewicht von so vielen Kräften gleich der welche das Strick spannt, erhalten wird, als Stricke sind die den beweglichen Kloben erhalten, weil diese Stricke alle als parallel angenommen sind.

Nun sey ein System von Körpern oder vielmehr, von Punkten welche auf eine beliebige Art untereinander vertheilt und jeder durch eine oder mehrere Kräfte nach gegebenen Richtungen gezogen sind; man verlangt das allgemeine Gesetz von dem Gleichgewicht dieses Systems.

Wir wollen zuerst annehmen, daß alle Kräfte welche sich das Gleichgewicht halten, unter sich commensurabel seyn, so daß wenn P ihr gemeinschaftliches Maaß ist, so klein es auch sey, diese Kräfte durch aP, bP, cP, u. s. w. ausgedrückt sind, wo a, b, c, u. s. w. ganze Zahlen bedeuten. Es ist klar, daß man jede Kraft durch aP vor-

ſtellen kann, oder vielmehr ihre Würkung, durch die Würkung eines an einem Ende befeſtigten und am andern Ende durch ein Gewicht $\frac{P}{2}$ geſpanntes Strick, welches zwey Kloben umgiebt einen beweglichen an den Punkt des Syſtems auf welchen die Kraft würkt, und den andern unbeweglichen in einem beliebigen Punkt in der Richtung dieſer Kraft befeſtigt, dergeſtalt, daß, wenn der bewegliche Kloben aus a Rollen zuſammengeſetzt iſt, darin 2a Stricke ſind welche ihn berühren; denn alsdann würde das Gewicht $\frac{P}{2}$ auf dieſen Kloben und mithin auf den Punkt des Syſtems an welchem ſie als befeſtigt vorausgeſetzt iſt, eine Kraft ausüben, gleich $\frac{P}{2}$ multiplicirt durch die Anzahl der Stricke 2a, das heißt eine Kraft gleich aP.

Ferner, es iſt ſichtbar, daß man alle die verſchiedenen Kräfte aP, bP, cP, u. ſ. w. durch einerley Gewicht $\frac{P}{2}$ hervorbringen kann, welches an dem einen Ende eines am andern Ende feſten Stricks befeſtigt iſt, und ſucceſſive über alle, jedem Punkt des Syſtems zugehörige Kloben geht, vermittelſt der in dem unbeweglichen Kloben befeſtigten zurückführenden Rolle (poulies de renvois). Es iſt augenſcheinlich, daß in dieſer Vertheilung das Gleichgewicht des Syſtems allgemein geſprochen nur alsdann ſtatthaben wird, wenn die Lage des Syſtems ſo beſchaffen iſt, daß das Gewicht nicht weiter herabſteigen kann; denn wenn es noch durch eine Veränderung in der Lage des Syſtems, herabſteigen könnte, ſo würde weil dieſe Veränderung ganz frey angenommen iſt, das Gewicht nothwendig herabſteigen

abſteigen. Ich ſage: allgemein geſprochen; denn man weiß, daß es beſondere Fälle des Gleichgewichts giebt, wo das Herabſteigen des Gewichts, das kleinſte iſt, ſtatt das größte zu ſeyn. Darüber ſehe man die analytiſche Mechanik.

Dies vorausgeſetzt, ſo wollen wir mehrerer Einfachheit wegen annehmen, daß das erſte Ende des Stricks am erſten unbeweglichen Kloben befeſtigt ſey, und daß das andere Ende des Stricks das Gewicht trage, nachdem es über die zuführende in der im letzten unbeweglichen Kloben befeſtigten Rolle gegangen iſt.

Es ſey x die Entfernung zwiſchen den beyden erſten Kloben, einen feſten und einen beweglichen, woraus die Kraft aP entſteht, y die Entfernung zwiſchen den beyden andern Kloben, welche die Kraft bP hervorbringen und z die Entfernung zwiſchen den Kloben, welche die Kraft cP hervorbringen, und ſo weiter. Es ſey ferner F die Entfernung zwiſchen den beyden erſten zurückführenden Rollen, p die Entfernung zwiſchen der zweyten und dritten, h die Entfernung zwiſchen der dritten und vierten, u. ſo weiter; endlich ſey w der Theil des zwiſchen der letzten zurückführenden und dem Gewicht $\frac{P}{2}$ enthaltenen Stricks, welches Gewicht an ſeinem äußerſten Ende befeſtigt iſt. Es iſt leicht zu ſehen, daß, weil 2a Stricke ſind, welche die beyden erſten Kloben verbinden, die ganze Länge des Stricks, welches dieſe Kloben umgiebt 2ax ſeyn wird, eben ſo iſt die ganze Länge desjenigen Theils des Stricks, welches die beyden folgenden Kloben umgiebt 2by, und ſo weiter; wir abſtrahiren hier vom Durchmeſſer der Rollen, die man ſo klein als man will annehmen kann. Ferner, die Theile des Stricks, welches

sich zwischen den zurückführenden Rollen befinden, werden, f, g, und h seyn; fügt man also zu allen diesen Theilen den letzten Theil u des Stricks hinzu, so hat man

$$2ax + 2by + 2cz + u.s.w. + f + g + h + u.s.w.,$$

für die ganze Länge des Stricks, welche wir durch l bezeichnen wollen. Hieraus ziehen wir

$$u = l - f - g - h - u.s.w. - 2ax - 2by - 2cz - u.s.w.$$

In dieser Gleichung sind die Größen l, f, g, h u.s.w. gegeben und beständig, so wie die Zahlen a, b, c durch die Natur des Systems; die Entfernungen x, y, z u.s.w. sind veränderliche Größen, welche von der Lage des Systems abhängen, und die Größe u bestimmt das Herabsteigen des Gewichts $\frac{P}{2}$ welche, da sie im Zustande des Gleichgewichts des Systems am größten seyn muß, so muß u alsdann ein Maximum seyn.

Also hat man überhaupt für das Gleichgewicht des Systems, u mag ein Maximum oder Minimum seyn, die Bedingung $u' = o$ und folglich

$$2ax' + 2by' + 2cz' + u.s.w. = o,$$

Die Erstefunktionen x', y', z' u.s.w. beziehen sich auf jede der veränderlichen Größen von welchen die Größen x, y, z u.s.w. abhängen.

Die vorhergehende Gleichung wird, nachdem man sie durch $\frac{P}{2}$ multiplizirt

$$aPx' + bPy' + cPz' + u.s.w.$$

eine allgemeine Gleichung von dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für ein System von Punkten, welche

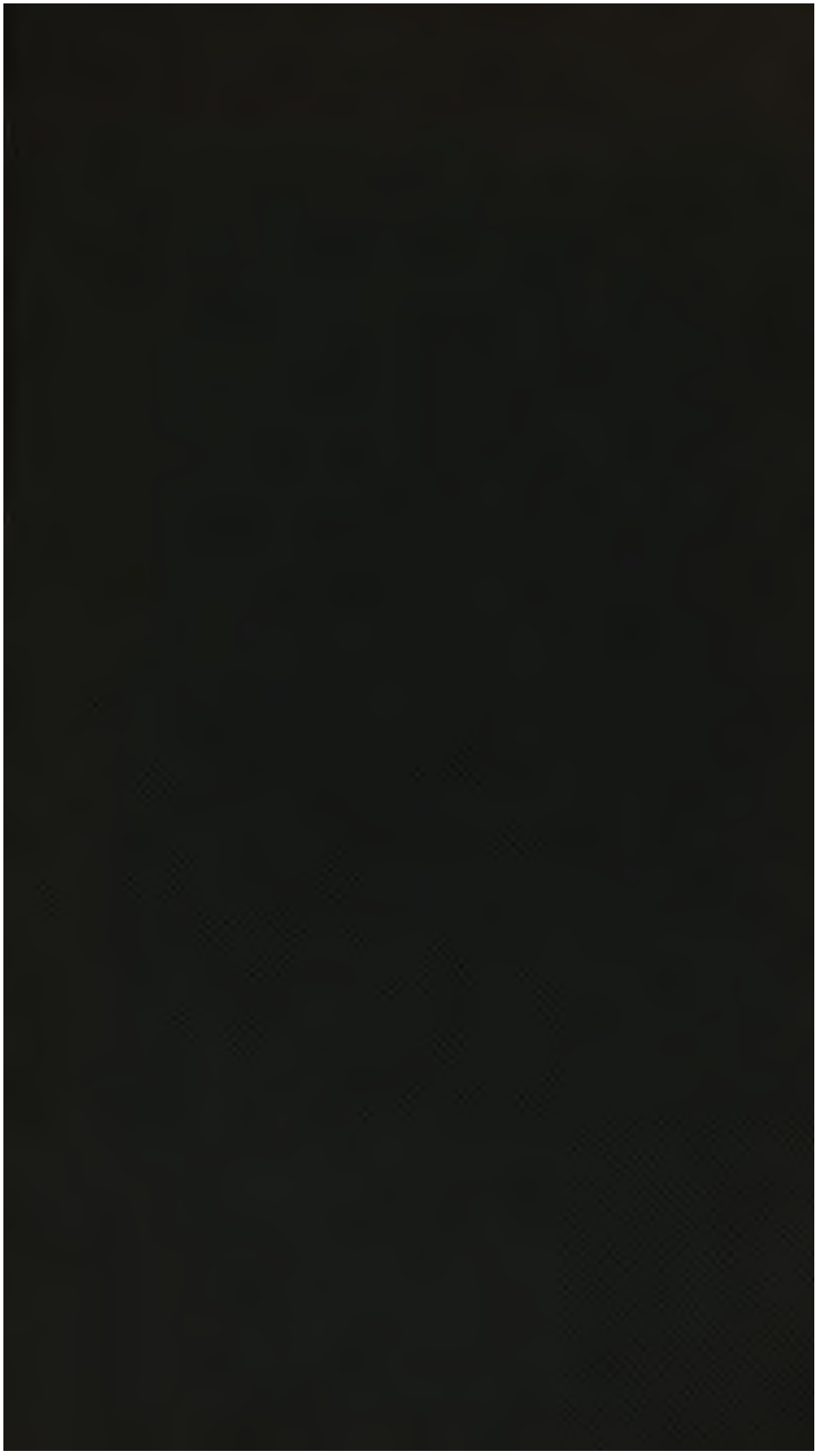
che durch die Kräfte aP, bP, cP u. ſ. w. nach den Richtungen der Linien x, y, z u. ſ. w. gezogen werden, weil die Erſtefunktionen x', y', z' u. ſ. w. nichts anders ſind als die Geſchwindigkeiten, welche die Punkte des Syſtems nach der Richtung dieſer nemlichen Linien, durch eine beliebige Veränderung in der Lage des Syſtems, erhalten könnten. Siehe Nr. 210 von der Theorie der Funktionen, zu welchem das was wir eben gezeigt haben, als Supplement dienen kann.

Obgleich der vorhergehende Beweis die Commenſurabilität der Kräfte vorausſetzt, ſo iſt er doch deswegen nicht minder allgemein für beliebige Kräfte, und es würde nicht ſchwer ſeyn, ihn auf incommenſurable Kräfte, durch das bekannte Raiſonnement anzuwenden; wir wollen uns aber hierbey nicht aufhalten.

Ich will nur, in Beziehung auf den Fall des Gleichgewichts, wo das Herabſteigen des Gewichts ein Minimum iſt, hinzufügen, daß man dieſe Arten von Gleichgewicht immer auf das Gleichgewicht des Maximum zurückbringen kann, indem man die Kräfte in ſolchen Richtungen nimmt, welche ihren ſeigenen Richtungen entgegengeſetzt ſind; denn man weiß, daß, wenn Kräfte in einem beliebigen Syſtem im Gleichgewicht ſind, das Gleichgewicht nach beſtehen wird, indem man dieſen Kräften entgegengeſetzte Richtungen giebt, wenn nur dadurch keine Unordnung in dem Syſtem entſteht, das heißt, daß die Körper oder Punkte die wegen der Natur des Syſtems neben einander und auf gegebene Entfernungen ſeyn ſollen, genöthigt ſind ihre reſpective Lage, nach der Veränderung der Richtung der Körper zu behalten; und es iſt leicht zu

beweisen, daß wenn das Herabsteigen des Gewichts im ersten Zustand ein Maximum ist, es nach dieser Veränderung ein Minimum seyn wird, und umgekehrt, daß es ein Maximum werden wird, wenn es ein Minimum war.

Ende.

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
REFERENCE DEPARTMENT

This book is under no circumstances to be taken from the Building